Sistemi Dinamici

Elaborato 4: esercizi riepilogativi sulla prima parte del corso

Problema 1. Dato il sistema descritto dalla funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s-1}{s^4 + \alpha s^3 + 2(\alpha+1)s^2 + 16s + 8}$$

determinare α in modo che la risposta del sistema (per condizioni iniziali nulle) al gradino unitario $u(t) = 1(t)$ sia della forma

$$y(t) = \left[A + (B + Ct)e^{-2t} + De^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi)\right] 1(t)$$

dove $A, B, C, D, \sigma, \omega, \phi$ sono opportune costanti (con $A, B, C, D, \sigma, \omega$ diverse da zero). Calcolare quindi il valore di tali costanti.

Problema 2. L'evoluzione nel tempo dell'uscita di un sistema dinamico tempo-continuo è descritta dalla seguente equazione

$$y(t) = \int_0^t w(t-\tau)u(\tau^3)d\tau$$

dove $w(t)$ è una certa funzione reale e $u(t)$ è la funzione di ingresso.

1. Dire se il sistema è lineare
2. Supponendo di considerare l'evoluzione del sistema per $t \in [0, t_0]$, dire se il sistema può definirsi causale per qualunque valore di t_0.

Giustificare le affermazioni fatte.

Problema 3. Dato il sistema lineare tempo-discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= 2x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) - x_2(t) - u(k) \\ x_1(0) &= 0 \\ x_2(0) &= 1 \end{cases}$$

1. Determinare la risposta libera nello stato.
2. Determinare la risposta forzata ad un ingresso a gradino unitario.

Problema 4. Si consideri il sistema tempo-discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= u(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) + \frac{1}{4}x_3(k) \\ x_3(k+1) &= 2x_1(k) + x_2(k) \\ y(k) &= x_2(k) + x_3(k) \end{cases}$$

1. Assumendo le condizioni iniziali $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 1$, determinare la risposta libera nello stato $x_l(k)$.
2. Calcolare la risposta forzata nell'uscita relativa all'ingresso impulsivo $u(k) = \delta(k)$.
3. Determinare se possibile un segnale di ingresso $u(k)$ tale che la risposta forzata nell'uscita risulti essere pari a $y_f(k) = (k-1)\,\mathbf{1}(k-1)$.

Problema 5. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalla equazione ingresso-uscita

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = u(t).$$

1. Determinare le matrici A, B, C, D di una rappresentazione ingresso-stato-uscita del sistema.
2. Determinare la risposta forzata $y_f(t)$, relativa all'ingresso a gradino unitario $u(t) = 1$, $t \geq 0$.
3. Determinare le condizioni iniziali del sistema, tali per cui la risposta libera sia pari a $y_l(t) = \sin 2t$, $t \geq 0$.
4. Determinare l'ingresso $u(t)$, in modo tale che la risposta forzata del sistema sia pari a $y_f(t) = t^3\, e^{-t}$.

Problema 6. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalla equazione alle differenze finite

$$y(k) - y(k-1) + \frac{3}{16}y(k-2) = u(k-1) - \frac{3}{8}u(k-2).$$

1. Determinare le matrici A, B, C, D di una rappresentazione ingresso-stato-uscita del sistema.
2. Determinare la risposta libera $y_l(k)$ del sistema, relativa alle condizioni iniziali $y(-1) = 0$, $y(-2) = 1$.
3. Determinare la riposta impulsiva del sistema.
4. Calcolare il segnale d'ingresso $u(k)$ tale per cui la risposta forzata nell'uscita del sistema è pari a $y(k) = \left(\frac{1}{4}\right)^k \mathbf{1}(k-1)$.

Problema 7. Si consideri il sistema descritto dalle equazioni

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{array} \right.$$

in cui

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = 0.$$

1. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare il carattere dei modi propri del sistema
2. Al variare di α, calcolare l'espressione della risposta al gradino $u(t) = \mathbf{1}(t)$
3. Al variare di α e β, determinare l'espressione della risposta all'esponenziale $u(t) = e^{\beta t}\, \mathbf{1}(t)$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Problema 8. È dato il sistema lineare tempo-invariante tempo-continuo descritto dalle equazioni

$$\dot{x}(t) \quad = \quad Ax(t)$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -\alpha & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui i modi del sistema sono reali e convergenti, ovvero hanno limite finito per $t \to +\infty$
2. Posto $\alpha = 0$, determinare esplicitamente i modi del sistema.

Problema 9. È dato il sistema lineare tempo-continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -(\alpha+2) & 2(\alpha+1) & 1 \\ -(\alpha+1) & \alpha & \alpha+2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

1. Determinare i modi propri del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Per $\alpha = -1$, calcolare la risposta libera nello stato alla condizione iniziale $x_0 = [1 \quad -1 \quad 0]'$.
3. Per $\alpha = -1$, calcolare la risposta forzata nell'uscita al gradino unitario per condizioni iniziali nulle.
4. Per $\alpha = -1$, verificare se è definita la risposta di regime permanente sinusoidale. Se sì, determinare un possibile ingresso sinusoidale $u(t)$ in modo che la risposta di regime permanente valga $y_P(t) = \frac{1}{2}\sin t \cdot 1(t)$.

Problema 10. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dallo schema a blocchi in Figura 1

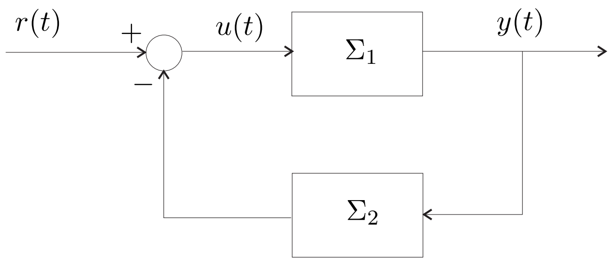

Figura 1

in cui Σ_1 è descritto dalla equazione ingresso-uscita

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = \dot{u}(t) - u(t).$$

(I) Assumendo $\Sigma_2 = 0$, calcolare la risposta forzata $y_f(t)$ del sistema, relativa all'ingresso a gradino $r(t) = 1(t)$.

(II) Determinare la funzione di trasferimento $C(s)$ del sistema Σ_2, in modo che la risposta forzata $y_f(t)$, relativa all'ingresso impulsivo $r(t) = \delta(t)$, sia pari a $y_f(t) = (4e^{-t} - 3e^{-\frac{1}{2}t}) \cdot 1(t)$.

(III) Assumendo $\Sigma_2 = K$, con K costante reale, determinare per quali valori reali di K la risposta libera del sistema in retroazione con ingresso $r(t)$ e uscita $y(t)$, converge a zero a partire da qualunque condizione iniziale.

Problema 11. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dallo schema a blocchi in Figura 2

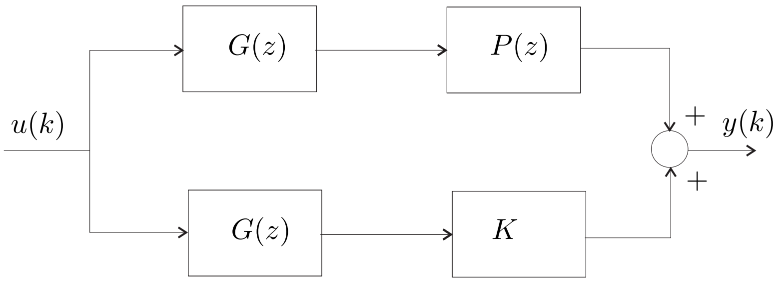

Figura 2

in cui

$$G(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{2}} \quad , \quad P(z) = \frac{z}{z-1}.$$

1. Assumendo $K = 1$, calcolare la risposta impulsiva del sistema.
2. Assumendo $K = 2$, calcolare la risposta forzata del sistema relativa all'ingresso a gradino.
3. Determinare, se possibile, il valore di K affinchè la risposta impulsiva del sistema sia costante, e calcolare il valore di tale costante.
4. Determinare un segnale d'ingresso $u(k)$ non identicamente nullo, tale per cui la risposta forzata del sistema si annulli in un tempo finito. Calcolare la risposta relativa all'ingresso scelto.

Problema 12. Si consideri il sistema LTI descritto dallo schema a blocchi in Figura 3

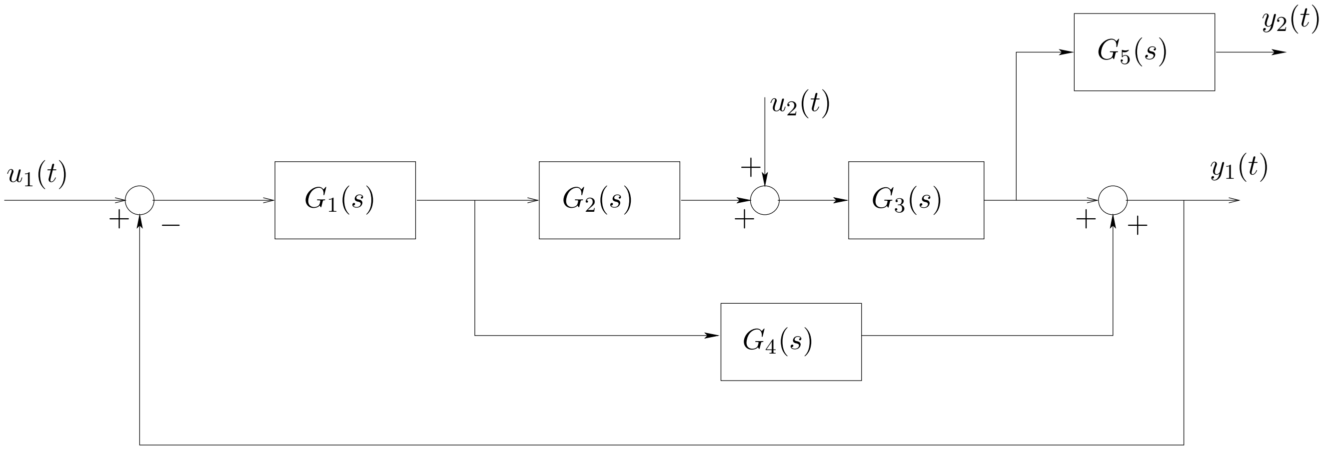

Figura 3

Determinare le funzioni di trasferimento $W_{ij}(s)$ dall'ingresso $u_j(t)$ all'uscita $y_i(t)$, per $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$.