Sistemi Dinamici

Elaborato 3: sistemi dinamici LTI a tempo discreto, trasformata Zeta

Problema 1. Si vuole determinare il modello dell'evoluzione della popolazione in una città. A tale fine, si considerano 2 differenti classi: quella degli individui fra 0 e 15 anni (prima classe) e maggiori di 15 anni (seconda classe). Siano μ_1 e μ_2 i tassi di mortalità di ciascuna classe (la frazione di individui deceduti in quella classe nell'arco di 15 anni), mentre si indichi con α_2 il tasso di fertilità della classe 2 (l'unica in grado di avere figli), espresso come il numero medio di figli che ogni individuo ha in 15 anni. Sia inoltre $u(k)$ il numero di immigrati (tutti di età superiore ai 15 anni) che si trasferiscono in città in un periodo k della durata di 15 anni.
Costruire un modello a tempo discreto in variabili di stato che renda ragione dell'evoluzione a periodi di 15 anni del numero di appartenenti alla seconda classe in funzione del numero di immigrati.
Determinare successivamente un modello ingresso-uscita (considerando sempre come uscita il numero di appartenenti alla seconda classe) e calcolarne la funzione di trasferimento.
Assumendo $\mu_1 = 0.1$ e $\mu_2 = 0.2$, determinare per quali valori del parametro α_2 la popolazione non è destinata ad estinguersi in caso di immigrazione nulla.

Problema 2. In un casinò, una delle attrazioni si basa sul gioco delle tre carte: lo scommettitore deve indovinare dove si trova una carta, scegliendone una fra tre coperte, disposte casualmente (in media, quindi, un terzo dei giocatori indovina e due terzi sbagliano). Più specificamente, si tratta di un gioco a turni in cui, pagata una quota di iscrizione fissa (pari ad α), ciascun giocatore continua a giocare finché non indovina consecutivamente due volte (e allora riceve il premio), o sbaglia consecutivamente due volte (e allora viene eliminato dal gioco).

1. Si costruisca un modello lineare ingresso-stato-uscita tempo discreto, che metta in relazione il numero di giocatori che ad ogni turno k inizia a giocare ($u(k)$), con il numero di quelli che vincono la scommessa e incassano il premio ($y(k)$). Si considerino come variabili di stato il numero di giocatori che hanno indovinato una volta ed il numero di giocatori che hanno sbagliato una volta.

2. Determinare un modello ingresso-uscita, a partire dal modello calcolato al punto precedente.

3. Supponendo che il casinò voglia trattenere per sè (e quindi non ridistribuire come premio) il 50% degli incassi forniti dalle quote di iscrizione, determinare (in funzione di α) l'entità del premio che deve essere erogato in caso di vittoria supponendo che ad ogni turno inizi a giocare sempre lo stesso numero di giocatori e che sia trascorso un numero elevato di turni dall'inizio del gioco.

Problema 3. È dato il sistema a tempo discreto descritto dalla seguente equazione

$$y(k+2) + 0.5y(k+1) - 0.5y(k) = u(k).$$

1. Determinare le matrici A, B, C, D di una rappresentazione ingresso-stato-uscita del sistema.

2. Determinare la risposta del sistema per ingresso nullo e condizioni iniziali $y(-1) = 0$, $y(-2) = 1$.

3. Calcolare la risposta forzata del sistema relativa all'ingresso a gradino unitario.

4. Determinare se la risposta forzata del sistema relativa all'ingresso $u(k) = (-1)^k$, $k \geq 0$, è limitata.

Problema 4. La risposta all'impulso di un sistema lineare tempo-discreto tempo-invariante è data dalla sequenza

$$\{w(k)\} = \left\{1, -1, 3\sigma^2, -3\sigma^2, 9\sigma^4, -9\sigma^4, 27\sigma^6, -27\sigma^6, \dots\right\}$$

dove σ è un parametro reale.

1. Determinare la funzione di trasferimento del sistema
2. Determinare, se esistono, i valori di σ tali che la risposta all'impulso tenda a zero per $k \to +\infty$.
3. Posto $\sigma = 1/(2\sqrt{3})$, calcolare la risposta al gradino unitario.

Problema 5. Calcolare l'antitrasformata zeta delle seguenti funzioni

$$F(z) = \frac{z^3}{(z^2 - 1/4)(z + 1/3)} \quad ; \quad F(z) = \frac{z+1}{z^2(z - 1/2)} \quad ; \quad F(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2z + 1} \quad (\textit{attenzione!})$$

Problema 6. È dato il sistema lineare tempo-discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) &=& \frac{1}{2}x_1(k) + x_2(k) \\ x_2(k+1) &=& x_2(k) + u(k) \\ x_3(k+1) &=& x_3(k) + u(k) \\ y(k) &=& x_1(k) + x_3(k) \end{cases}$$

1. Determinare la funzione di trasferimento del sistema.
2. Calcolare la risposta forzata del sistema all'ingresso impulsivo $u(k) = \delta(k)$.
3. Determinare un segnale d'ingresso $u(k)$ limitato, tale che la corrispondente risposta forzata $y_f(k)$ risulti non limitata.

Problema 7. Si consideri il sistema a tempo-discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) &=& x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &=& \frac{1}{2}\, x_1(k) + \frac{1}{2}\, x_2(k) \\ x_3(k+1) &=& -x_1(k) + 2\, x_2(k) + \frac{1}{2}\, x_3(k) \\ y(k) &=& x_2(k) \end{cases}$$

1. Determinare la risposta libera nello stato $x_l(k) = (x_{l_1}(k), x_{l_2}(k), x_{l_3}(k))'$, nei casi:
   - $x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 2;$
   - $x_1(0) = x_2(0) = 1,\ \ x_3(0) = 2;$
   - $x_1(0) = 0,\ \ x_2(0) = 3,\ \ x_3(0) = 0.$
2. Determinare la risposta forzata nell'uscita $y_f(k)$, relativa all'ingresso a gradino unitario $u(k) = 1(k)$.

Problema 8. Si consideri il sistema lineare tempo-discreto descritto dallo schema a blocchi in Figura 1

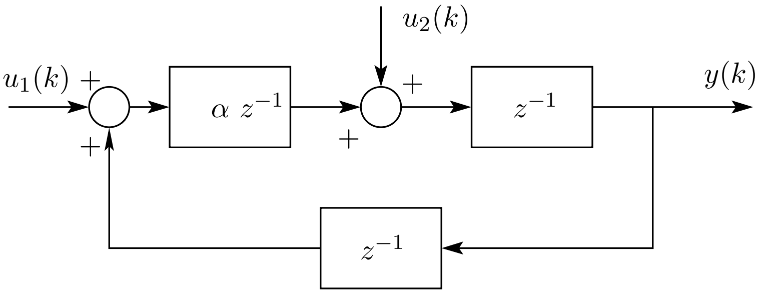

Figura 1.

dove α è un parametro reale.

1. Calcolare la funzione di trasferimento $W_1(z)$ da $u_1(k)$ a $y(k)$, e la funzione di trasferimento $W_2(z)$ da $u_2(k)$ a $y(k)$.

2. Determinare il valore di regime assunto da $y(k)$ per $k \to +\infty$ in funzione di α, nei seguenti casi:

   - $u_1(k) = 1$, $u_2(k) = 0$, $\forall\ k \geq 0$;
   - $u_1(k) = 0$, $u_2(k) = 1$, $\forall\ k \geq 0$;
   - $u_1(k) = 3$, $u_2(k) = 5$, $\forall\ k \geq 0$.

3. Assumendo $\alpha = 1$, calcolare la risposta impulsiva relativa all'ingresso $u_1(k)$ (con $u_2(k) \equiv 0$).