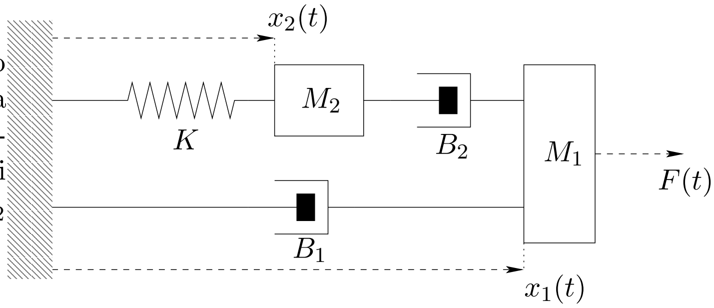
**Sistemi Dinamici**

Elaborato 1: sistemi dinamici LTI a tempo continuo, trasformate di Laplace, funzioni di trasferimento

**Problema 1.** Si consideri il sistema meccanico masse/molle/smorzatori in figura, dove $F(t)$ è una forza applicata dall'esterno, $x_1(t)$ ed $x_2(t)$ sono le posizioni delle masse $M_1$ ed $M_2$ rispetto alla posizione di riposo, $K$ è la costante elastica della molla e $B_1$ e $B_2$ sono i coefficienti di attrito viscoso degli smorzatori.




1. Assumendo come ingresso $u(t) = F(t)$ e come uscita $y(t) = x_1(t)$, determinare una rappresentazione ingresso-stato-uscita del sistema. Calcolare le matrici $A, B, C, D$.
2. Calcolare la funzione di trasferimento del sistema. Determinare una rappresentazione ingresso-uscita del sistema.
3. Utilizzando i valori numerici sotto riportati calcolare, utilizzando la trasformata di Laplace, l'andamento nel tempo di $y(t) = x_1(t)$, partendo da sistema a riposo, quando all'istante $t = 0$ viene applicato un ingresso costante $u(t) = F(t) = F_0 \, \mathbf{1}(t)$.

Valori numerici: $M_1 = M_2 = 1$ kg, $B_1 = B_2 = 3$ Ns/m, $K = 0.2$ N/m, $F_0 = 1$ N.

**Problema 2.** Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dall'equazione ingresso-uscita

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 2\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) = u(t).$$

1. Determinare una rappresentazione ingresso-stato-uscita del sistema. Calcolare le matrici $A, B, C, D$.
2. Assumendo $y(0) = 5,\ \dot{y}(0) = 1,\ \ddot{y}(0) = 0$, determinare la risposta libera del sistema.
3. Calcolare la risposta impulsiva del sistema.
4. Calcolare la risposta forzata del sistema, relativa all'ingresso $u(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})$.
5. Determinare quale segnale di ingresso $u(t)$ genera una risposta forzata pari a

$$y_f(t) = \frac{t^3}{6}e^{-t}.$$

**Problema 3.** Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni

$$f(t) = e^t + te^{-t} \quad ; \quad f(t) = e^{2t}\cos(t) \quad ; \quad f(t) = t^2\cosh(t/2) \quad ; \quad f(t) = \int_0^t \tau e^{-2\tau}\cos(4\tau + \pi/3)\, d\tau$$

**Problema 4.** Calcolare l'antitrasformata di Laplace delle seguenti funzioni

$$F(s) = \frac{s^2+1}{s^2+2s+2} \quad ; \quad F(s) = \frac{s-1}{s^2(s+1)^2} \quad ; \quad F(s) = \frac{e^{-s}}{s(s^2+5s+6)} \quad ; \quad F(s) = \frac{s^4}{(s^2+1)^2}$$

**Problema 5.** Dato il sistema LTI a tempo continuo ad un ingresso e due uscite

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

determinare la matrice di trasferimento $W(s)$ e la risposta totale nell'uscita, relativa al segnale d'ingresso $u(t) = \sin t\, \mathbf{1}(t)$, sapendo che la condizione iniziale vale $x_0 = [1 \ \ 1]^T$.

**Problema 6.** È dato il sistema LTI a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

1. Determinare la risposta libera nello stato alla condizione iniziale $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 2$.
2. Determinare la risposta forzata nell'uscita $y_f(t)$ all'ingresso a gradino unitario $u(t) = \mathbf{1}(t)$.
3. Determinare per quale ingresso $u(t)$, la risposta forzata del sistema è pari a $y_f(t) = (t - 1 + e^{-t})\, \mathbf{1}(t)$.