Prova scritta di SISTEMI DINAMICI del 17.02.2022

Esercizio 1.
Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato dallo schema a blocchi in figura

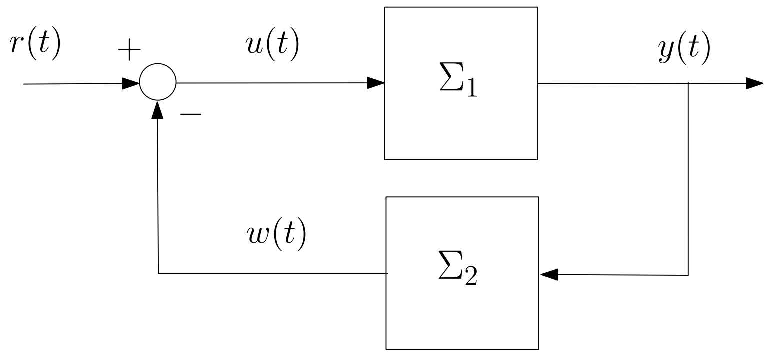

Figura 1.

dove il blocco Σ_1 è descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -2\,x_1(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

e il blocco Σ_2 è descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \beta\,x_2(t) + y(t) \\ w(t) &= x_2(t) \end{aligned}$$

in cui β è un parametro reale.

1. Determinare le matrici A, B, C, D di una rappresentazione ingresso-stato-uscita del sistema complessivo, avente come ingresso $r(t)$ e come uscita $y(t)$.

2. Studiare la stabilità del sistema al variare di $\beta \in \mathbb{R}$.

3. Assumendo $\beta = 0$, determinare il valore asintotico della risposta forzata, $\lim_{t\to+\infty} y_f(t)$, relativa all'ingresso a gradino $r(t) = 1(t)$.

4. Assumendo $\beta = 0$ e $r(t) = \cos(\omega t)$, determinare per quali valori di $\omega \in \mathbb{R}$ l'ampiezza della risposta di regime permanente risulta essere maggiore di $\dfrac{1}{4}$.

Esercizio 2.
Un sistema lineare tempo-invariante, a tempo discreto, ha come risposta impulsiva il segnale

$$\Big\{g(k)\Big\}_{k=0}^{+\infty} = \{1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\dots\}.$$

1. Determinare una rappresentazione ingresso-uscita del sistema (indicare l'ingresso con $u(k)$ e l'uscita con $y(k)$).

2. Determinare la risposta forzata $y_f(k)$ relativa all'ingresso a gradino unitario $u(k) = 1(k)$.

3. Determinare il segnale d'ingresso $u(k)$ in modo tale che la risultante risposta forzata $y_f(k)$ sia costante per ogni $k \geq 0$.

4. Assumendo di applicare il segnale di ingresso $u(k) = Ky(k-1) + r(k)$, determinare per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ il sistema risultante avente ingresso $r(k)$ e uscita $y(k)$ è stabile in senso ILUL.

Esercizio 3.

Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1(k+1) &=& \frac{2}{3}\,x_1(k) + \frac{1}{3}\,x_2(k) \\ x_2(k+1) &=& \frac{1}{2}\,x_1(k) + \frac{1}{2}\,x_2(k) + u(k) \\ y(k) &=& x_1(k) \end{cases}$$

1. Studiare la stabilità del sistema. Determinare i modi del sistema e dire quali sono convergenti, limitati non convergenti o divergenti.

2. Determinare le equazioni di un osservatore asintotico dello stato, tale per cui l'errore di stima $x(k) - \hat{x}(k)$ risulta essere nullo per ogni $k \geq 2$.

3. Si assuma ora di applicare l'ingresso

$$u(k) = \frac{1}{16} - x_1^2(k).$$

Determinare gli stati di equilibrio del sistema.

4. Studiare la stabilità degli stati di equilibrio calcolati al punto 3.