Prova scritta di SISTEMI DINAMICI del 28.01.2022

Esercizio 1.
Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato dallo schema a blocchi in figura

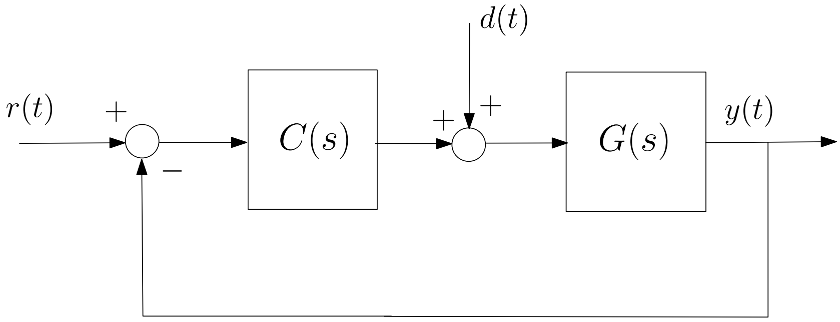

Figura 1.

dove

$$C(s) = \frac{K}{s+3} \quad , \qquad G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

e K è un parametro reale.

1. Determinare per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ il sistema avente ingresso $r(t)$ e uscita $y(t)$ è stabile in senso ILUL.

2. Assumendo $K = 8$ e $d(t) = 0$ $\forall t$, determinare la risposta impulsiva del sistema $y_{imp}(t)$, relativa all'ingresso $r(t) = \delta(t)$.

3. Assumendo $d(t) = 1(t)$ e $r(t) = 0$ $\forall t$, determinare per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ il valore asintotico della risposta forzata è tale per cui

$$\lim_{t \to +\infty} y_f(t) < \frac{1}{5} \; .$$

4. Assumendo $K = 8$ e $r(t) = 0$ $\forall t$, determinare la risposta di regime permanente $y_{perm}(t)$ relativa all'ingresso $d(t) = \cos(\sqrt{2}t) \cdot 1(t)$.

Esercizio 2.
Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dal modello ingresso-stato-uscita

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= u_1(k) \\
x_2(k+1) &= x_1(k) + u_2(k) \\
x_3(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) \\
y(k) &= x_3(k)
\end{aligned}$$

1. Determinare la risposta forzata nell'uscita $y_f(k)$ relativa agli ingressi $u_1(k) = 1(k)$, $u_2(k) = 0$ $\forall k$.

2. Assumendo $u_1(k) = \alpha\, x_3(k)$ e $u_2(k) = \alpha\, x_3(k)$, dove α è un parametro reale, determinare il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che il sistema abbia stati di equilibrio non nulli. Per tale valore di α, riportare gli stati di equilibrio ottenuti e studiare la stabilità del sistema.

3. Studiare la raggiungibilità del sistema nei seguenti casi:

   a) sono disponibili entrambi gli ingressi $u_1(t)$ e $u_2(t)$;

   b) è disponibile il solo ingresso $u_1(t)$;

   c) è disponibile il solo ingresso $u_2(t)$.

4. Supponendo di poter utilizzare entrambi gli ingressi $u_1(t)$ e $u_2(t)$, determinare il minor numero di passi T in cui è possibile raggiungere lo stato $x_1(T) = x_2(T) = x_3(T) = 10$, a partire dallo stato iniziale nullo $x(0) = 0$. Riportare le sequenze di ingresso corrispondenti.

Esercizio 3.

Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -4x_1(t) - 5x_2(t) + u(t)\\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

1. Determinare gli stati iniziali $x(0)$ per cui la risposta libera nell'uscita $y_l(t)$ contiene solo il modo $e^{-4t} \cdot 1(t)$.

2. Determinare una legge di controllo in retroazione dello stato $u(t) = Fx(t)$, in modo tale che la risultante risposta libera contenga solo modi periodici di pulsazione $\omega = 3$ rad/sec.

3. Si assuma ora di applicare l'ingresso

$$u(t) = \begin{cases} 8\, x_1(t) & \text{se } x_1(t) \le \beta \\ 8\sqrt{\beta\, x_1(t)} & \text{se } x_1(t) \ge \beta \end{cases}$$

   dove β è una costante positiva. Determinare gli stati di equilibrio del sistema al variare di $\beta > 0$.

4. Studiare la stabilità degli stati di equilibrio calcolati al punto 3.