

Prova scritta di SISTEMI DINAMICI del 15.2.2021

Esercizio 1.

Una corpo di massa $M = 1 \text{ kg}$ si muove su una guida rettilinea senza attrito, vincolato ad una molla di costante elastica $K = 4 \frac{N}{m}$. Per semplicità, si consideri la massa puntiforme e la molla a riposo in corrispondenza dell'origine della guida $y = 0$.

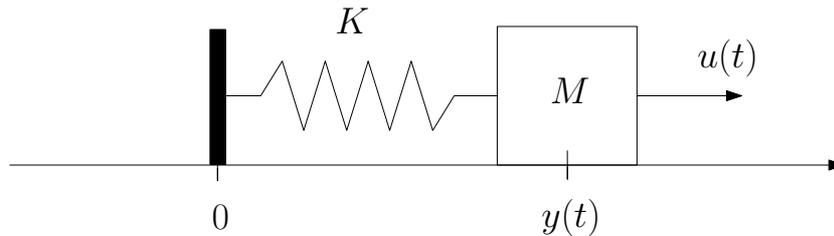


Figura 1

1. Assumendo come ingresso la forza $u(t)$ applicata alla massa nella direzione positiva dell'asse y e come uscita la posizione $y(t)$ della massa lungo la guida (v. Figura 1), determinare una rappresentazione ingresso-stato-uscita del sistema.
2. Determinare i modi del sistema. Studiare sia la stabilità interna del sistema, sia la stabilità in senso ILUL.
3. Determinare le condizioni iniziali nello stato $x(0)$ in modo che la risposta libera nell'uscita risulti essere $y_l(t) = 5 \sin(2t)$.
4. Assumendo di applicare alla massa, a partire dall'istante $t = 0$, una forza costante pari a 4 N , determinare la risposta forzata $y_f(t)$ risultante. Calcolare la massima distanza dall'origine y_{max} raggiunta dalla massa.

Esercizio 2.

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto, descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + u(k) \\ x_3(k+1) = 2x_2(k) + \alpha u(k) \\ y(k) = x_1(k) \end{cases}$$

dove α è un parametro reale.

1. Determinare i modi del sistema e dire se sono convergenti, limitati non convergenti o divergenti.
2. Assumendo $\alpha = 0$, determinare la risposta impulsiva nell'uscita $y_{imp}(k)$.
3. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema è completamente raggiungibile.
4. Assumendo $\alpha = 0$, determinare una legge di controllo in retroazione dello stato, in modo tale che la risposta libera nello stato del sistema risultante sia nulla per ogni $k \geq 3$, per qualunque condizione iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^3$.

Esercizio 3.

Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato dallo schema a blocchi in Figura 2

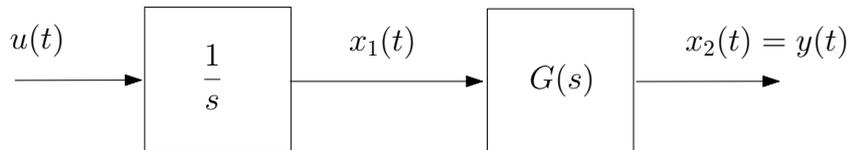


Figura 2

in cui $G(s) = \frac{10}{s+5}$.

1. Determinare le matrici A, B, C, D di una rappresentazione ingresso-stato-uscita del sistema, avente ingresso $u(t)$, uscita $y(t)$ e variabili di stato $x_1(t), x_2(t)$ come in Fig. 2.
2. Determinare la funzione di trasferimento $W(s)$ dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$ e tracciarne i diagrammi di Bode.
3. Si assuma ora di applicare il segnale di ingresso $u(t) = 1 - y^2(t)$. Determinare gli stati di equilibrio del sistema.
4. Discutere la stabilità degli stati di equilibrio calcolati al punto 3.