

Prova scritta di SISTEMI DINAMICI dell'11.7.2013

Candidato:

Corso di Laurea

Esercizio 1

Il sistema meccanico descritto in Figura 1 è composto da una massa M appesa ad un soffitto mediante una molla di costante elastica K ed un elemento di attrito viscoso di costante β . Si indichi con $y(t)$ la posizione della massa rispetto al soffitto, e sia $u(t) = Mg$ la forza peso che agisce sulla massa.

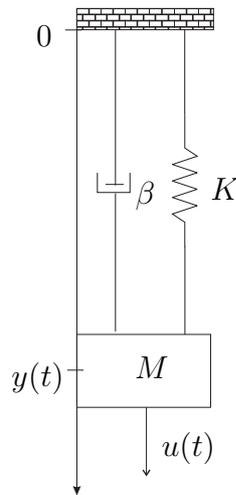


Figura 1.

- 1) Assumendo come ingresso $u(t)$ e come uscita $y(t)$, determinare l'espressione dell'equazione differenziale che rappresenta un modello ingresso-uscita del sistema.
- 2) Determinare le matrici A , B , C e D di una rappresentazione ingresso-stato-uscita del sistema.
- 3) Determinare il valore di regime $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_f(t)$ della risposta forzata relativa all'ingresso a gradino $u(t) = Mg \cdot 1(t)$.
- 4) Assumendo i valori: $M = 2$ kg, $\beta = 1$ Ns/m, determinare per quali valori di K i modi della risposta libera del sistema (nel caso in cui cioè non si consideri la forza peso) risultano essere:
 - aperiodici;
 - pseudoperiodici;
 - convergenti.

Determinare i modi della risposta libera nel caso $K = 0$.

Esercizio 2

Si consideri il sistema a tempo-discreto descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{4}x_2(k) + u(k) \\x_2(k+1) &= \frac{1}{2}x_1(k) + \alpha x_2(k) + u(k) \\y(k) &= x_2(k)\end{aligned}$$

dove α è un parametro reale.

- 1) Assumendo $\alpha = \frac{3}{4}$, studiare la stabilità del sistema, sia nello spazio degli stati che in senso ILUL.
- 2) Assumendo $\alpha = \frac{3}{4}$, determinare il valore di regime $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_l(k)$ della risposta libera nello stato relativa alle condizioni iniziali $x_1(0) = x_2(0) = 1$.
- 3) Discutere la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 4) Per i valori di α per cui il sistema risulta essere non completamente raggiungibile, determinare se possibile la matrice F di una legge di controllo in retroazione dello stato, $u(k) = Fx(k)$, tale per cui la risposta libera del sistema risultante sia identicamente nulla per ogni istante $k \geq 1$, qualunque sia la condizione iniziale $x(0)$.

Esercizio 3

Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in Figura 2

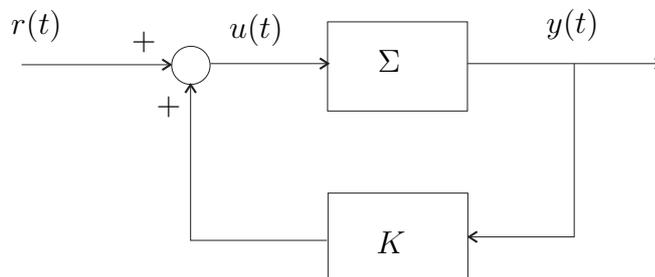


Figura 2

dove K è un parametro reale e Σ rappresenta un sistema dinamico descritto dalle equazioni ingresso-stato-uscita

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) - x_2^3(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}\tag{1}$$

- 1) Determinare le equazioni di una rappresentazione ingresso-stato-uscita del sistema avente come ingresso $r(t)$ e come uscita $y(t)$.
- 2) Determinare gli stati di equilibrio del sistema di cui al punto 1), in funzione di K .
- 3) Discutere la stabilità degli stati di equilibrio trovati al punto 2), al variare di $K \in \mathbb{R}$.