1.I

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.II

$$y(k) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \Rightarrow Y(z) = 100 \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$Y(z) = C(zI-A)^{-1} z \cdot x(0) + \left[C(zI-A)^{-1}B + D\right] \begin{bmatrix} 0 \\ V(z) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1 & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}^{-1} z \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1 & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot V(z) =$$

$$= 100 \frac{z}{z-1} - \frac{1}{z-1} \cdot V(z) = 100 \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$V(z) = (z-1) \cdot 100 z \left\{ \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-\frac{1}{2}} \right\} = \frac{100 z}{z-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow v(k) = 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

1.III

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Il sistema è completamente raggiungibile in 2 passi

$$x(2) - A^2 x(0) = R_2 \begin{bmatrix} m(1) \\ v(1) \\ m(0) \\ v(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}50\\50\\50\end{pmatrix} - A^2\begin{pmatrix}200\\30\\40\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m(1)\\ v(1)\\ m(0)\\ v(0)\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-220\\50\\50\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-v(1)-v(0)\\ m(0)\\ m(1)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m(0)=50\\ m(1)=50\\ v(1)+v(0)=220\end{cases}$$

1. IV

$$R_T = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\end{bmatrix}$$

Inoltre $x(T)-A^T x(0) = \begin{pmatrix}-220\\50\\50\end{pmatrix} \quad \forall T \geq 2$

Si ha quindi

$$\begin{cases} -v(T-1)-v(T-2)+m(T-3)-v(T-3)+m(T-4)-v(T-4)+\ldots \\ \quad \ldots + m(0)-v(0) = -220\\ m(T-2)=50\\ m(T-1)=50\end{cases}$$

Affinché la prima equazione sia soddisfatta con $v(k) \leq 30$ si può scegliere $m(k)=0$ $\forall k \leq T-3$ e $v(0)=v(1)=\ldots=v(6)=30$, $v(7)=10$

Quindi occorrono 8 passi.

1. V $\mathcal{O} = \begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Il sistema è completamente osservabile.

Se si assume $C=[0\ 1\ 0]$ si ha:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{X}^{no} = L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sottospazio non osservabile

Infine se $C = [0 \quad 0 \quad 1]$ si ha

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{X}^{no} = L\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

In entrambi i casi, dalla decomposizione di osservabilità si ha che $\lambda_1 = 1$ è un autovalore non osservabile. Perciò non è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato.

1.VI $x_1(k)$: quantità di merci in magazzino da più di due giorni

$x_2(k)$: merci al secondo giorno di magazzino

$x_3(k)$: " " primo " " "

2.I $x_1 = \theta \quad x_2 = \dot{\theta} \quad x_3 = c$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{B}{J}x_2 + \frac{K}{J}x_3$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{R}{L}x_3 - \frac{K}{L}x_2 + \frac{1}{L}u$$

$$y = x_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{J} & \frac{K}{J} \\ 0 & -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & K \\ 0 & -\frac{K}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

2.II

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & -K \\ 0 & \frac{K}{2} & \lambda+2 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda \left[\lambda^2 + 4\lambda + 4 + \frac{K^2}{2} \right]$$

Marginalmente stabile $\forall K$.

2.III

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \frac{\frac{K}{2}}{s\left(s^2 + 4s + 4 + \frac{K^2}{2}\right)}$$

Non è ILUL stabile: la risposta al gradino $u(t) = 1(t)$ contiene il modo $t \cdot 1(t)$, che è divergente.

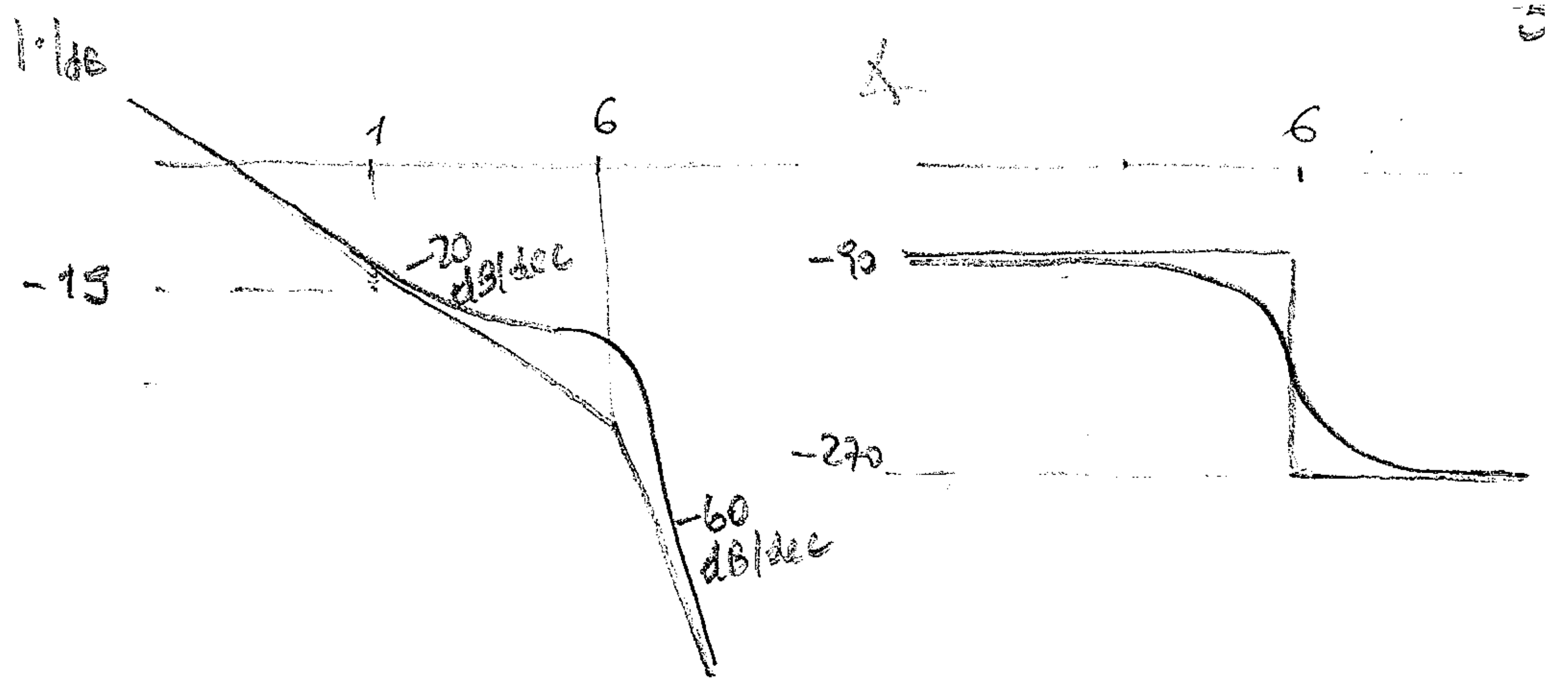
2.IV

$$G(s) = \frac{4}{s(s^2+4s+36)} = \frac{1}{9s} \frac{1}{1 + 2 \cdot \frac{1/3}{6} s + \frac{1}{(6)^2} \cdot s^2}$$

$$20 \log_{10} \frac{1}{9} \simeq -19\,dB$$

$\omega_n = 6$

$\zeta = \frac{1}{3}$



2 V

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{2\omega} \frac{1}{\left|\left(4+\frac{K^2}{2}-\omega^2\right)+j4\omega\right|} > \frac{1}{10}$$

Il modulo è decrescente, almeno per ω significativamente inferiori al primo punto di rottura che è pari a $\omega_n = 4 + \frac{K^2}{2} > 4$

È quindi sufficiente imporre la condizione per $\omega = 1$:

$$\frac{K}{2} \frac{1}{\sqrt{\left(3+\frac{K^2}{2}\right)^2+16}} > \frac{1}{10}$$

$$25K^2 > 9 + \frac{K^4}{4} + 3K^2 + 16$$

$$\frac{K^4}{4} - 22K^2 + 25 < 0$$

$$\Rightarrow \quad 1.1514 < K^2 < 86.8486$$

$$\Rightarrow \quad 1.0730 < K < 9.3193$$

<u>Nota</u>: Anche se G(s) ha un polo in zero, il risultato è valido perché la risposta di regime permanente contiene un termine costante che altera il valor medio ma non l'ampiezza dell'oscillazione.

3,I

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \qquad u(t) = r(t) - w(t) = r(t) - x_3(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -b_0 & -b_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} r(t)$$

3,II

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ a_0 & s+a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -1 & 0 & b_0 & s+b_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{s^2 + b_1 s + b_0}{(s^2+a_1 s+a_0)(s^2+b_1 s+b_0) + 1}$$

$$y^{(4)}(t) + (a_1+b_1)y^{(3)}(t) + (a_0 + a_1 b_1 + b_0)y^{(2)}(t) + (a_0 b_1 + b_1 a_0)\dot{y}(t)$$
$$+ (a_0 b_0 + 1)y(t) = u^{(2)}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

3,III

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -a_1 & -a_0+a_1^2 \\ 1 & -a_1 & -a_0+a_1^2 & 2a_0a_1-a_1^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1-b_1 \end{bmatrix} \qquad \det R = 1 \neq \emptyset$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -1 & 0 \\ a_0a_1 & -a_0+a_1^2 & a_1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \det O = 1 \neq \emptyset$$

3, IV

$$(s^2+s+1)(s^2+ks)+1 = s^4+(k+1)s^3+(k+1)s^2+ks+1$$

$$\begin{array}{lll} 1 & k+1 & 1 \\ k+1 & k & \\ \frac{k^2+k+1}{k+1} & 1 & \\ \left\{\frac{k^3+k^2+k}{k+1} - k+1\right\}\frac{k+1}{k^2+k+1} & & \\ 1 & & \end{array}$$

$\longrightarrow \quad k>-1$

$\longrightarrow \quad k^2+k+1>0 \quad \forall k \in R$

$\longrightarrow \quad k^3+k^2+k-k^2-2k-1 = k^3-k-1>0$

$\Downarrow$

$k>1{,}3247$

Per $k=2$ i modi sono:

e^{-t} $\quad e^{-1.7549\,t}$ $\quad e^{-0.1226\,t}\begin{matrix}\cos(0.7449\,t)\\ \sin(\quad)\end{matrix}$

3, V

```
check=1;
k=1.32;
while check, k=k+0,01;
check = all (imag(roots([1 k+1 k+1 k 1])));
end
```

$\longrightarrow$ $k=1.86$

$\Rightarrow$ I modi sono pseudoperiodici convergenti per $1.32<k<1.86$.

4.I
$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ -x_1 x_3 + \alpha x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 x_2 - \beta x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = x_2$$
$$x_3 = \frac{1}{\beta} x_1^2 \qquad \beta \neq 0$$
$$-x_1 \cdot \frac{1}{\beta} x_1^2 + \alpha x_1 - x_1 = 0$$
$$x_1 \left\{ \alpha - 1 - \frac{1}{\beta} x_1^2 \right\} = 0 \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_1^2 = \beta(\alpha - 1) \end{array}$$

$$\bar{x}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{x}_B = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta(\alpha-1)} \\ \sqrt{\beta(\alpha-1)} \\ (\alpha-1) \end{pmatrix} \qquad \bar{x}_C = \begin{pmatrix} -\sqrt{\beta(\alpha-1)} \\ -\sqrt{\beta(\alpha-1)} \\ (\alpha-1) \end{pmatrix}$$

$\beta \cdot (\alpha - 1) > 0$. [$\Rightarrow \alpha > 1$, essendo $\beta > 0$]

4.II
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -x_3 + \alpha & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -\beta \end{pmatrix}$$

$\bar{x}_A$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$ $\quad \det(\lambda I - A) = (\lambda + \beta)(\lambda^2 + 2\lambda + 1 - \alpha)$

AS. STABILE se $\beta > 0$ & $\alpha < 1$

INSTABILE se $\alpha > 1$

$\bar{x}_B, \bar{x}_C$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{\beta(\alpha-1)} \\ \pm\sqrt{\beta(\alpha-1)} & \pm\sqrt{\beta(\alpha-1)} & -\beta \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & \pm\gamma \\ \mp\gamma & \mp\gamma & \lambda+\beta \end{pmatrix} \qquad \gamma=\sqrt{\beta(\alpha-1)}$$

$$= (\lambda+1)\left\{\lambda^2+(\beta+1)\lambda+\beta+\gamma^2\right\} - (\lambda+\beta) + \gamma^2 =$$

$$= \lambda^3+(\beta+2)\lambda^2+(2\beta+\gamma^2)\lambda+2\gamma^2 =$$

$$= \lambda^3+(\beta+2)\lambda^2+(\beta+\beta\alpha)\lambda+2\beta(\alpha-1)=0$$

$$\begin{matrix} 1 & \beta(\alpha+1) \\ \beta+2 & 2\beta(\alpha-1) \end{matrix}$$

$\beta > -2$ ✓

$$\frac{(\beta+2)\beta(\alpha+1)-2\beta(\alpha-1)}{\beta+2} = *$$

$\beta(\alpha-1)$

$\beta(\alpha-1) > 0$ ✓

$$* = \beta^2\alpha+\beta^2+\cancel{2\beta\alpha}+2\beta-\cancel{2\beta\alpha}+2\beta =$$

$$= \beta^2(\alpha+1)+4\beta > 0$$

$\alpha > -\dfrac{4}{\beta} - 1 \implies$ sempre soddisfatta, essendo $\alpha > 1$

Quindi $\bar{X}_B$ e $\bar{X}_C$ sono sempre asintoticamente stabili

5.I

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow x(1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \notin S$$

5.II

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad |x_i| < 1$$

$$|a_{11} x_1 + a_{12} x_2| \leq 1 \qquad \forall x_i : |x_i| < 1$$

$$\Rightarrow \quad |a_{11}| + |a_{12}| \leq 1$$

Analogamente: $|a_{21}| + |a_{22}| \leq 1$

Essendo $\|A\|_\infty \triangleq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, la condizione necessaria e sufficiente può essere scritta sinteticamente come $\|A\|_\infty \leq 1$.