Elementi di Algebra Lineare

Spazio Vettoriale (lineare)

Uno *spazio vettoriale* su un corpo $\mathcal{F}$ è una quadrupla $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, +, \cdot)$ costituita da:

- un insieme di elementi $\mathcal{X}$, detti *vettori*,
- un corpo $\mathcal{F}$, i cui elementi sono detti *scalari*,
- un'operazione detta *addizione tra vettori*, $(+)$,
- un'operazione detta *prodotto per uno scalare*, $(\cdot)$,

tali che:

1. (chiusura) $x_1 \in \mathcal{X}, x_2 \in \mathcal{X} \implies (x_1 + x_2) \in \mathcal{X}$
2. (commutatività) $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
3. (associatività) $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$
4. (elementi neutri) $\begin{cases} \exists 0 \in \mathcal{X} : \forall x \in \mathcal{X} x + 0 = x \\ \exists 1 \in \mathcal{F} : \forall x \in \mathcal{X} 1 \cdot x = x \end{cases}$
5. (elemento inverso) $\forall x_1 \in \mathcal{X} \exists x_2 \in \mathcal{X} : x_1 + x_2 = 0$
6. (associatività) $\alpha \cdot (x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$
7. (distributività) $(\alpha + \beta) \cdot x_1 = \alpha x_1 + \beta x_1$

Spazio Vettoriale sul corpo reale

- $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$
- Esempio: $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$x_1 + x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad 2 \cdot x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$$

- <u>Combinazione lineare di vettori</u>

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathbb{R}^n,$$

  α e β coefficienti della combinazione lineare

- <u>Indipendenza lineare</u>: due vettori x_1 ed x_2 sono linearmente indipendenti se la combinazione $\alpha x_1 + \beta x_2$ è nulla solo per $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.
- <u>Base di uno spazio vettoriale</u>: insieme di n vettori linearmente indipendenti.
- Esempio: i versori degli assi coordinati di una terna cartesiana sono vettori indipendenti.
- <u>Vettori di base</u>: un insieme di n vettori indipendenti.
- Esempio: i versori degli assi coordinati di una terna cartesiana una base dello spazio vettoriale $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

Cambio di coordinate - Cambio di base

- Vecchia base: e.g. versori assi coordinati

$$B_e := [e_1,\ e_2\ \cdots\ e_n]$$

- Nuova base: insieme vettori indipendenti (espressi nella vecchia base);

$$B_\eta := [\eta_1,\ \eta_2\ \cdots\ \eta_n]$$

- Cambio di base: matrice di trasformazione tra i due sistemi di coordinate.

$$\bar{x} = T^{-1}x \quad \Rightarrow \quad x = T\bar{x}$$

- Rappresentazione del primo vettore della nuova base, η_1, rispetto alla nuova base:

$$\bar{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Rappresentazione della nuova base nelle nuove coordinate: matrice identità.

$$\bar{B}_\eta := [\bar{\eta}_1\ \bar{\eta}_2\ \cdots\ \bar{\eta}_n] = I$$

- E quindi:

$$\bar{B}_\eta = T^{-1}B_\eta = I$$

- Matrice di trasformazione

$$T := B_\eta = [\eta_1,\ \eta_2\ \cdots\ \eta_n].$$

Cambio di coordinate
Sistemi simili
$\Updownarrow$
Sistemi algebricamente equivalenti

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Fx + Gu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\
y &= Hx + Du, \quad y \in \mathbb{R}^p
\end{aligned}
$$

- Sia T una matrice di cambio di coordinate.
- $\bar{x} = T^{-1}x$ le nuove coordinate, nello spazio di stato.
- Sistema dinamico nelle nuove coordinate

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{x}} &= T^{-1}\dot{x} \\
&= T^{-1}(Fx + Gu) \\
&= T^{-1}FT\bar{x} + T^{-1}Gu \\
&= \bar{F}\bar{x} + \bar{G}u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= HT\bar{x} \\
&= \bar{H}\bar{x}
\end{aligned}
$$

- Le matrici del sistema nelle nuove coordinate:

$$
\bar{F} := T^{-1}FT, \quad \bar{G} := T^{-1}G, \quad \bar{H} := HT
$$

Sottospazi vettoriali

- Sia $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale.
- Sia $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ un sottoinsieme dei vettori.
- $(\mathcal{V}, \mathcal{F}, +, \cdot)$ (brevemente, $\mathcal{V}$) è un sottospazio di $\mathcal{X}$ se ha struttura di spazio vettoriale esso stesso.
- Condizione fondamentale: chiusura rispetto alla combinazione lineare:

$$v_1, v_2 \in \mathcal{V} \Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in \mathcal{V}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{F}$$

- Esempio: $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$
- Sottospazi:
  - rette per l'origine;
  - piani per l'origine;
  - iperpiani per l'origine

- Immagine di una matrice Data una matrice

$$M = \left[\, m_1 \;\; m_2 \;\; \cdots \;\; m_n \,\right], \quad m_i \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Im }(M) = \text{ span } < m_1, \; m_2, \; \cdots \; m_n >$$

Spazio vettoriale generato dalla combinazione lineare delle colonne di M,

Sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

- Rango di una matrice: numero di colonne linearmente indipendenti, e quindi dimensione dell'immagine della matrice.

- Nucleo di una matrice (Kernel di una matrice)

$$\text{Ker }(M) = \{x : Mx = 0, x \in \mathbb{R}^n\}$$

Ker (M) è uno spazio vettoriale, sottospazio di $\mathbb{R}^n$

- Nullità di una matrice: Dimensione del suo nucleo

- Soluzione di equazioni algebriche

$$x = Rv, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^q$$

Esempi di spazi vettoriali

- Spazio dei polinomi $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, +, \cdot)$
  - $\mathcal{X}$: insieme dei polinomi di grado qualsiasi;
  - $\mathcal{F}$: corpo dei reali;
  - operazioni: somma tra polinomi, prodotto polinomio per scalare
  - NOTA: spazio a dimensione infinita
- Spazio dei polinomi di grado minore od uguale ad n $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, +, \cdot)$
  - $\mathcal{X}$: insieme dei polinomi di grado minore od uguale ad n;
  - $\mathcal{F}$: corpo dei reali;
  - operazioni: somma tra polinomi, prodotto polinomio per scalare
  - NOTA: la rappresentazione di un vettore è un elemento dello spazio $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$
- Spazio delle funzioni esponenziali
  - $\mathcal{X}$: insieme di tutte le (combinazioni) di funzioni esponenziali con parametri $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n)$
  - $\mathcal{F}$: corpo dei reali;
  - operazioni: somma tra funzioni, prodotto funzione per scalare
  - NOTA: la rappresentazione di un vettore è un elemento dello spazio $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

Esercizio: trovare una base per ciascuno degli spazi indicati sopra.

Polinomio caratteristico ed autovalori

Sia F una matrice quadrata sul corpo reale $\mathbb{R}$ ($F \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

- Il polinomio

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F), \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

  è il polinomio caratteristico della matrice F.

- Le soluzioni dell'equazione $\Delta_F(\lambda) = 0$ costituiscono gli autovalori della matrice F.

- Molteplicità di λ come zero del polinomio caratteristico $\Rightarrow$ molteplicità algebrica di λ come autovalore di F.

- Più precisamente, F è un rappresentazione di un'applicazione lineare $\mathcal{F}$, e si dovrebbe parlare di polinomio caratteristico ed autovalori dell'applicazione $\mathcal{F}$.

- Per estensione, dato un sistema dinamico TC

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

  o un sistema dinamico TD

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

  $\Delta_F(\lambda)$ è il polinomio caratteristico del sistema e le sue radici sono gli autovalori del sistema.

- Esempio:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix},$$

$(\lambda - 1)(\lambda - 3) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4;$

autovalori: $\lambda = 2; \lambda = 2;$

- Esempio: matrice diagonale

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \lambda I - F = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix},$$

$\det(\lambda I - F) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3);$

autovalori: $\lambda = 1; \lambda = 2; \lambda = 3;$

- Esempio: matrice triangolare

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix},$$

$\det(\lambda I - F) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3);$

autovalori: $\lambda = 1; \lambda = 2; \lambda = 3;$

- Esempio: matrice in forma canonica di controllore

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix},$$

$\det(\lambda I - F) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$

Autovalori ed autovettori

- Sia $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale;
- Sia data una matrice reale F;
- Sia λ un autovalore di F;
- un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ è <u>autovettore</u> della matrice F associato all'autovalore λ se:

$$Fv = \lambda v, \qquad (F - \lambda I)v = 0$$

- Se λ è reale, l'autovettore è reale;
- Se λ è complesso, l'autovettore è complesso;
- v appartiene al nucleo di $(F - \lambda I)$:

$$v \in \text{ Ker } (F - \lambda I)$$

.