MODELLI LINEARI STAZIONARI

Tempo Continuo ($t \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & \text{(TC.1)} \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & \text{(TC.2)} \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ e' lo stato

$u \in \mathbb{R}^p$ e' l'ingresso

$y \in \mathbb{R}^q$ e' l'uscita

Di conseguenza: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$.

Sia $t_0 \in \mathbb{R}$ l'istante iniziale e

$$x(t_0) = x_0 \qquad \text{(TC.3)}$$

la condizione iniziale al tempo t_0.

> Si vuole determinare una funzione $x(t)$ che soddisfi (TC.1) e (TC.3).
> Una volta determinata $x(t)$, $y(t)$ si ricava applicando (TC.2).

NOTA - un caso particolare ...

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a\,x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ costante}$$

cerchiamo una funzione $x(t)$ la cui derivata sia uguale ad a volte la funzione stessa...

Ricordiamo la funzione esponenziale...

soluzione: $x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0$

verifica:

- $x(t_0) = e^{\overbrace{a(t_0-t_0)}^{0}} x_0 = e^0 x_0 = x_0$
- $\dot{x}(t) = a\,e^{a(t-t_0)} x_0 = a\left[e^{a(t-t_0)} x_0\right] = a\,x(t)$

In serie di potenze, la funzione esponenziale è espressa da

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!}$$

Generalizziamo...

Esponenziale di matrice

Data $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$e^{At} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

proprietà

- serie assolutamente convergente
- $e^{A \cdot 0} = I$ (matrice identità)
- $e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2}$
- $\frac{d e^{At}}{dt} = A e^{At} = e^{At} A$

La soluzione di (TC.1) e (TC.3) è:

integrale di convoluzione

$$x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)} x_0}_{\text{RISPOSTA LIBERA}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}_{\text{RISPOSTA FORZATA}}$$

dipende solo dalla condizione iniziale x_0

dipende solo dall'ingresso $u(\cdot)$

Quindi, applicando la (TC.2):

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ &= \underbrace{C e^{A(t-t_0)} x_0}_{\text{RISPOSTA LIBERA}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + Du(t)}_{\text{RISPOSTA FORZATA}} \end{aligned}$$

NOTA IMPORTANTE

Si osservi che la distinzione in risposta libera e risposta forzata riflette la proprietà di sovrapposizione degli effetti:

$$\eta(t; t_0, x_0, u(\cdot)) = \eta(t; t_0, x_0, 0) + \eta(t; t_0, 0, u(\cdot))$$

Tipicamente, per modelli stazionari si considera $t_0 = 0$. Quindi:

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

$$y(t) = C e^{At} x_0 + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)$$

Tempo Discreto ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) & \text{(TD.1)} \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) & \text{(TD.2)} \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ è lo stato

$u \in \mathbb{R}^p$ è l'ingresso

$y \in \mathbb{R}^q$ è l'uscita

Di conseguenza: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$.

Sia $k_0 \in \mathbb{Z}$ l'istante iniziale e

$$x(k_0) = x_0 \qquad \text{(TD.3)}$$

la condizione iniziale al tempo k_0.

Si vuole determinare una successione $x(k)$ che soddisfi (TD.1) e (TD.3).
Una volta determinata $x(k)$, $y(k)$ si ricava applicando (TD.2).

Si osservi che:

- $x(k_0) = x_0$
- $x(k_0+1) = Ax(k_0) + Bu(k_0)$
  $= Ax_0 + Bu(k_0)$
- $x(k_0+2) = Ax(k_0+1) + Bu(k_0+1)$
  $= A^2x_0 + ABu(k_0) + Bu(k_0+1)$
- $x(k_0+3) = Ax(k_0+2) + Bu(k_0+2)$
  $= A^3x_0 + A^2Bu(k_0) + ABu(k_0+1) + Bu(k_0+2)$

$\vdots$

Generalizzando, la soluzione di (TD.1) e (TD.3) e':

$$x(k) = \underbrace{A^{k-k_0}x_0}_{\text{RISPOSTA LIBERA}} + \underbrace{\sum_{j=k_0}^{k-1} A^{k-j-1}Bu(j)}_{\text{RISPOSTA FORZATA}}$$

somma di convoluzione

dipende solo dalla condizione iniziale x_0

dipende solo dall'ingresso $u(\cdot)$

Quindi, applicando la (TD.2):

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$
$$= \underbrace{CA^{k-k_0}x_0}_{\text{RISPOSTA LIBERA}} + \underbrace{\sum_{j=k_0}^{k-1} CA^{k-j-1}Bu(j) + Du(k)}_{\text{RISPOSTA FORZATA}}$$

Tipicamente, per modelli stazionari si considera $\underline{k_0 = 0}$. Quindi:

$$x(k) = A^kx_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1}Bu(j)$$

$$y(k) = CA^kx_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1}Bu(j) + Du(k)$$

CALCOLO DELLA RISPOSTA LIBERA

Consideriamo il calcolo di:

Tempo Continuo

$$x_\ell(t) = e^{At}x_0 \quad \text{oppure} \quad y_\ell(t) = Ce^{At}x_0$$

Tempo Discreto

$$x_\ell(k) = A^k x_0 \quad \text{oppure} \quad y_\ell(k) = CA^k x_0$$

Il problema si riconduce al seguente:

> Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, determinare l'espressione di e^{At} e A^k in forma chiusa.

Metodo per il calcolo di e^{At} e A^k

Data una matrice $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ non singolare (quindi invertibile), definiamo la matrice

$$\tilde{A} \triangleq T^{-1}AT \qquad (*)$$

Supponiamo di saper scrivere $e^{\tilde{A}t}$, oppure $\tilde{A}^k$, in forma chiusa (per esempio, se $\tilde{A}$ è in forma diagonale, è immediato scrivere $e^{\tilde{A}t}$ e $\tilde{A}^k$).

Invertendo la $(*)$:

$$A = T\tilde{A}T^{-1}$$

Da cui:

$$\begin{aligned}
A^k &= \overbrace{A\cdot A\cdot \ldots \cdot A}^{k \text{ volte}} \\
&= (T\tilde{A}T^{-1})(T\tilde{A}T^{-1})\ldots(T\tilde{A}T^{-1}) \\
&= T\tilde{A}\overbrace{T^{-1}T}^{I}\tilde{A}T^{-1}\ldots T\tilde{A}T^{-1} \\
&= T\overbrace{\tilde{A}\cdot\tilde{A}\cdot\ldots\cdot\tilde{A}}^{k \text{ volte}}T^{-1} \\
&= T\tilde{A}^kT^{-1}
\end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{A^k = T\tilde{A}^kT^{-1}}$$

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} T\tilde{A}^k T^{-1} \frac{t^k}{k!} \\
&= T\left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{A}^k \frac{t^k}{k!}\right) T^{-1} \\
&= T e^{\tilde{A}t} T^{-1}
\end{aligned}
\qquad \Rightarrow \qquad \boxed{e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1}}
$$

Graficamente, il metodo considerato e' il seguente:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\times" marking] \arrow[d] & A^k \\
\tilde{A} \arrow[r] & \tilde{A}^k \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\times" marking] \arrow[d] & e^{At} \\
\tilde{A} \arrow[r] & e^{\tilde{A}t} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$\times$ indica un passaggio che, in generale, non e' immediato.

Esempio

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad e^{At} = ? \qquad A^k = ?
$$

Supponiamo che ci venga data la matrice (vedremo in seguito come calcolarla...)

$$
T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

T e' non singolare. Infatti, $\det(T) = 1 \neq 0$.

$$
T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}
$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{A}$ è in forma <u>diagonale</u>.

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{A}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ ovviamente, $1^k = 1$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$

Da cui:

$$e^{At} = Te^{\tilde{A}t}T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^{t} & 2e^{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t}-e^{t} & -2e^{2t}+2e^{t} \\ e^{2t}-e^{t} & -e^{2t}+2e^{t} \end{bmatrix}$$

$$A^k = T\tilde{A}^kT^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^k & -2^k \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{k+1}-1 & -2^{k+1}+2 \\ 2^k-1 & -2^k+2 \end{bmatrix}$$

<u>CASO NOTEVOLE - Matrici diagonali a blocchi</u>

Se la matrice $\tilde{A}$ è in forma <u>diagonale a blocchi</u>:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \tilde{A}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \tilde{A}_\nu \end{bmatrix}$$

<u>NOTA</u> - Si intende che $\tilde{A}_i$ può essere anche un blocchetto scalare...

allora:

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\tilde{A}_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\tilde{A}_2 t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & e^{\tilde{A}_\nu t} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^k = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{A}_2^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \tilde{A}_\nu^k \end{bmatrix}$$

Questo caso e' di interesse generale perche', data una <u>qualsiasi</u> matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, esistono procedure per trasformare la matrice A in una forma $\tilde{A}$ diagonale a blocchi nella quale ciascun singolo blocco $\tilde{A}_i$ sulla diagonale ha una struttura di cui si sa calcolare l'esponenziale $e^{\tilde{A}_i t}$ o la potenza $\tilde{A}_i^k$ <u>in forma chiusa</u>.

Richiami di Algebra Lineare

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, si definiscono <u>AUTOVALORI</u> di A le radici del polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

<u>proprietà</u>

- Gli autovalori di A sono tutti e soli i valori $\lambda \in \mathbb{C}$ per i quali la matrice $\lambda I - A$ è singolare. Infatti, se λ_0 è autovalore di A, allora

  $$\det(\lambda_0 I - A) = 0$$

- Il polinomio $p_A(\lambda)$ è un polinomio monico di grado n nella variabile λ, cioè assume la forma

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

monico perché il coefficiente che moltiplica il termine di grado massimo è 1.

- $p_A(\lambda)$ possiede esattamente n radici (contate con la loro molteplicità) nel campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

- Dato che i coefficienti α_i del polinomio sono reali (perché A è una matrice reale), se $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ è radice di $p_A(\lambda)$, allora anche λ_0^* (complesso coniugato di λ_0) è radice di $p_A(\lambda)$.

Dette $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (con $m \le n$) le radici distinte di $p_A(\lambda)$, si definisce MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA dell'autovalore λ_i la sua molteplicità come radice di $p_A(\lambda)$. Indicando le molteplicità algebriche con μ_i:

$$p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{\mu_i}$$

molteplicità algebrica di λ_i

esempio

$$p_A(\lambda) = \lambda^6 - 7\lambda^5 + 12\lambda^4 + 14\lambda^3 - 59\lambda^2 + 57\lambda - 18 =$$
$$= (\lambda-1)^3(\lambda+2)(\lambda-3)^2$$

n = grado del polinomio = 6

m = numero di radici distinte = 3

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \mu_1 = 3$

$\lambda_2 = -2 \Rightarrow \mu_2 = 1$

$\lambda_3 = 3 \Rightarrow \mu_3 = 2$

Si dicono AUTOVETTORI di A relativi all'autovalore λ_i tutti i vettori non nulli $v \in \mathbb{C}^n$ tali che

$$(\lambda_i I - A) v = 0$$

si osservi che questo sistema omogeneo ammette soluzioni non banali in quanto λ_i è autovalore di A, e quindi $\lambda_i I - A$ è una matrice singolare.

oppure, equivalentemente:

$$A v = \lambda_i v$$

Si definisce AUTOSPAZIO di A relativo all'autovalore λ_i il sottospazio vettoriale

$$\mathcal{V}_i = \ker(\lambda_i I - A) \subseteq \mathbb{C}^n$$

nucleo

NOTA- $\ker(A) = \{x : Ax = 0\}$

- $\mathcal{V}_i$ è formato da tutti gli autovettori di A relativi all'autovalore λ_i, e dal vettore nullo.

Si definisce MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA dell'autovalore λ_i, e si indica con ν_i, la dimensione del corrispondente autospazio $\mathcal{V}_i$:

$$\nu_i = \dim\left[\ker(\lambda_i I - A)\right]$$

$$= n - \text{rango}(\lambda_i I - A)$$

NOTA- Vale sempre la seguente relazione:

$$0 < \nu_i \leq \mu_i$$

per ogni $i = 1, \dots, m$.

Dunque, se $\mu_i = 1$, necessariamente $\nu_i = 1$.

DIAGONALIZZAZIONE

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si dice DIAGONALIZZABILE (su $\mathbb{C}$) se esiste una matrice $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ non singolare tale che la matrice

$$\Lambda = V^{-1} A V$$

è in forma diagonale, ossia:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Si può dimostrare che, se la matrice A è diagonalizzabile, gli elementi sulla diagonale di Λ sono tutti e soli gli autovalori di A, ripetuti secondo la loro molteplicità algebrica.

Come è possibile determinare se una data matrice A è diagonalizzabile, oppure no?

1. Calcolare gli autovalori λ_i di A.
2. Determinare la molteplicità algebrica μ_i di ciascun autovalore λ_i.
3. Determinare la molteplicità geometrica ν_i di ciascun autovalore λ_i.
4. A è diagonalizzabile se e solo se $\mu_i = \nu_i$ per ogni autovalore λ_i.

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizzabile, come è possibile trasformarla in una sua forma diagonale?

Distinguiamo due casi:

- tutti gli autovalori λ_i di A sono reali
- esistono autovalori λ_i di A complessi

CASO DI AUTOVALORI TUTTI REALI

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ gli autovalori distinti di A.

Per ogni autovalore λ_i, assumiamo $\mu_i = \nu_i$.

↳ la matrice A è diagonalizzabile

1. Determinare una base per ciascun autospazio $\mathcal{V}_i$

Indichiamo con $v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,\nu_i}$ i vettori di una base dell'autospazio $\mathcal{V}_i$ relativo all'autovalore λ_i.

sono in numero pari a $\nu_i = \mu_i$

2. Costruire T

$$T = \Big[\underbrace{v_{1,1} \dots v_{1,\nu_1}}_{\text{base di } \mathcal{V}_1} \quad \dots \quad \underbrace{v_{m,1} \dots v_{m,\nu_m}}_{\text{base di } \mathcal{V}_m} \Big]$$

↳ Le colonne di T sono i vettori di base degli autospazi.

3. Matrice Λ

Risulta:

$$\Lambda = T^{-1} A T =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_m & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \lambda_1 \text{ ripetuto } \nu_1 \text{ volte} \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \lambda_m \text{ ripetuto } \nu_m \text{ volte} \end{array}$$

4. Matrici $e^{\Lambda t}$ e Λ^k

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & e^{\lambda_1 t} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e^{\lambda_m t} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & e^{\lambda_m t} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1^k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_m^k \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_m^k \end{bmatrix}$$

5. Matrici e^{At} e A^k

Applicare

$$e^{At} = T e^{\Lambda t} T^{-1}$$

$$A^k = T \Lambda^k T^{-1}$$

<u>Esempio</u> - (si veda l'Esercizio svolto)

Caso di Autovalori Complessi

Premessa

Ricordiamo che, se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore della matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e $v \in \mathbb{C}^n$ è un autovettore di A relativo a λ, allora

$$Av = \lambda v.$$

Consideriamo:

- $\lambda = \sigma + i\omega$, con $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$, $\underline{\omega > 0}$.
- $v = v^{(1)} + i v^{(2)}$, con $v^{(1)}, v^{(2)} \in \mathbb{R}^n$

Dalla relazione precedente risulta:

$$A\left[v^{(1)} + i v^{(2)}\right] = \left[\sigma + i\omega\right]\left[v^{(1)} + i v^{(2)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad Av^{(1)} + iAv^{(2)} = \sigma v^{(1)} + i\sigma v^{(2)} + i\omega v^{(1)} - \omega v^{(2)}$$

$$= \left[\sigma v^{(1)} - \omega v^{(2)}\right] + i\left[\omega v^{(1)} + \sigma v^{(2)}\right]$$

Uguagliando le parti reali e le parti immaginarie di entrambi i membri, otteniamo:

$$\begin{cases} Av^{(1)} = \sigma v^{(1)} - \omega v^{(2)} \\ Av^{(2)} = \omega v^{(1)} + \sigma v^{(2)} \end{cases}$$

Scritte in forma matriciale:

$$A\left[v^{(1)} \ \ v^{(2)}\right] = \left[v^{(1)} \ \ v^{(2)}\right]\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

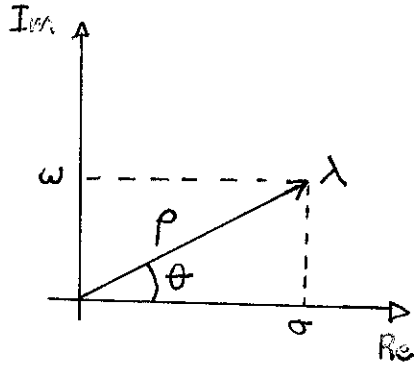
chiamiamo N questa matrice

Della matrice N si sanno scrivere le forme e^{Nt} e N^k:

- $$e^{Nt} = \begin{bmatrix} e^{\sigma t}\cos(\omega t) & e^{\sigma t}\sin(\omega t) \\ -e^{\sigma t}\sin(\omega t) & e^{\sigma t}\cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

NOTA - ω si chiama pulsazione dei modi sinusoidali.

- Essendo $\lambda = \sigma + i\omega$, con $\underline{\omega > 0}$:



$\underline{\text{modulo}}$: $\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$

$\underline{\text{fase}}$: $\theta = \mathrm{acos}\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)$

funzione "arcocoseno"

esempi notevoli

$\mathrm{acos}(1) = 0$ $\quad \mathrm{acos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ $\quad \mathrm{acos}(0) = \frac{\pi}{2}$

$\mathrm{acos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ $\quad \mathrm{acos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ $\quad \mathrm{acos}(-1) = \pi$

$$N^k = \begin{bmatrix} \rho^k \cos(k\theta) & \rho^k \sin(k\theta) \\ -\rho^k \sin(k\theta) & \rho^k \cos(k\theta) \end{bmatrix}$$

NOTA - θ si chiama pulsazione dei modi sinusoidali.

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ gli autovalori reali di A, e $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_c \in \mathbb{C}$ gli autovalori complessi di A con parte immaginaria positiva.

Scriviamo:

$\lambda_j = \sigma_j + i\omega_j$ per $j = r+1, \dots, c$ $\qquad$ NOTA - $\omega_j > 0$

$\lambda_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ con $\rho_j = \sqrt{\sigma_j^2 + \omega_j^2}$ e $\theta_j = \mathrm{acos}\left(\frac{\sigma_j}{\rho_j}\right)$

NOTA - Tutti gli autovalori di A sono

$$\Big\{ \underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_r}_{\text{reali}},\ \underbrace{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_c}_{\text{complessi, con parte immaginaria positiva}},\ \underbrace{\lambda_{r+1}^*, \dots, \lambda_c^*}_{\text{complessi, con parte immaginaria negativa}} \Big\}$$

non sono esplicitamente presi in considerazione...

Assumiamo, per semplicità di notazione, che tutti gli autovalori siano distinti.

Dunque, A è sicuramente diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

Siano:

- $v_j \in \mathbb{R}^n$ autovettore relativo a λ_j, per $j = 1, \dots, r$.
- $v_j = v_j^{(1)} + i\, v_j^{(2)}$, con $v_j^{(1)}, v_j^{(2)} \in \mathbb{R}^n$, autovettore relativo a λ_j, per $j = r+1, \dots, c$.

Costruzione di T

$$T = \left[\begin{array}{ccc|cc|c|cc} v_1 & \dots & v_r & v_{r+1}^{(1)} & v_{r+1}^{(2)} & \dots & v_c^{(1)} & v_c^{(2)} \end{array}\right]$$

Matrice $\tilde{A}$

Risulta:

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ \hline & & & N_{r+1} & & \\ \hline & & & & \ddots & \\ \hline & & & & & N_c \end{array}\right] \quad \text{dove } N_j = \begin{bmatrix} \sigma_j & \omega_j \\ -\omega_j & \sigma_j \end{bmatrix}$$

per $j = r+1, \dots, c$

Matrici $e^{\tilde{A}t}$ e $\tilde{A}^k$

$$e^{\tilde{A}t} = \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{\lambda_r t} & & & \\ \hline & & & e^{N_{r+1}t} & & \\ \hline & & & & \ddots & \\ \hline & & & & & e^{N_c t} \end{array}\right] \quad \text{dove } e^{N_j t} = \begin{bmatrix} e^{\sigma_j t}\cos(\omega_j t) & e^{\sigma_j t}\sin(\omega_j t) \\ -e^{\sigma_j t}\sin(\omega_j t) & e^{\sigma_j t}\cos(\omega_j t) \end{bmatrix}$$

per $j = r+1, \dots, c$

$$\tilde{A}^k = \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} \lambda_1^k & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r^k & & & \\ \hline & & & N_{r+1}^k & & \\ \hline & & & & \ddots & \\ \hline & & & & & N_c^k \end{array}\right] \quad \text{dove} \quad N_j^k = \begin{bmatrix} \rho_j^k \cos(k\theta_j) & \rho_j^k \sin(k\theta_j) \\ -\rho_j^k \sin(k\theta_j) & \rho_j^k \cos(k\theta_j) \end{bmatrix}$$

Matrici e^{At} e A^k

Applicare

$$e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1}$$

$$A^k = T \tilde{A}^k T^{-1}$$

Esempio - (si veda l'Esercizio svolto)

Nota di Algebra Lineare

Se la matrice A ha una delle seguenti strutture:

- triangolare superiore a blocchi: $A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_3 \\ \hline O & A_2 \end{array}\right]$

- triangolare inferiore a blocchi: $A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & O \\ \hline A_3 & A_2 \end{array}\right]$

A_1 e A_2 quadrate

allora gli autovalori di A coincidono con l'unione degli autovalori di A_1 e A_2.

Cosa si può fare quando la matrice A non è diagonalizzabile?

> Ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ può essere trasformata in forma di Jordan...

CASO PARTICOLARE

- $n=3$
- due autovalori reali: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- per λ_1: $\mu_1 = 1 = \nu_1$
- per λ_2: $\mu_2 = 2 > 1 = \nu_2$

$\Rightarrow$ A non è diagonalizzabile

Siano:

- $v_1 \in \mathbb{R}^n$ autovettore relativo a λ_1 $\Rightarrow A v_1 = \lambda_1 v_1$
- $v_2 \in \mathbb{R}^n$ autovettore relativo a λ_2 $\Rightarrow A v_2 = \lambda_2 v_2$
- $v_3 \in \mathbb{R}^n$ autovettore generalizzato relativo a λ_2:

$$A v_3 = \lambda_2 v_3 + v_2$$

Calcolato risolvendo il sistema lineare:

$$(A - \lambda_2 I)\, v_3 = v_2$$

v_3 → vettore delle incognite

Costruzione di T

$$T = \left[\, v_1 \;\vdots\; v_2 \;\; v_3 \,\right]$$

Matrice $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right]$$

Matrici $e^{\tilde{A}t}$ e $\tilde{A}^k$

$$e^{\tilde{A}t} = \left[\begin{array}{c|cc} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_2 t}t \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{array}\right]$$

$$\tilde{A}^k = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2^k & \lambda_2^{k-1}k \\ 0 & 0 & \lambda_2^k \end{array}\right]$$

Matrici e^{At} e A^k

Applicare

$$e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1}$$

$$A^k = T \tilde{A}^k T^{-1}$$

Esempio - (si veda l'Esercizio svolto)

EVITARE DI INVERTIRE T

Abbiamo visto che il calcolo di e^{At} e A^k e' finalizzato al calcolo della risposta libera di sistemi lineari stazionari:

$$x(t) = e^{At}x_0 = T e^{\tilde{A}t} T^{-1}x_0 \qquad \text{TC}$$

$$x(k) = A^k x_0 = T \tilde{A}^k T^{-1}x_0 \qquad \text{TD}$$

Posto $\alpha = T^{-1}x_0$, e' possibile calcolare α senza invertire la matrice T?

$\Rightarrow$ α è <u>la</u> soluzione del sistema lineare:

$$\boxed{T\alpha = x_0}$$

dove α è il vettore delle incognite.

<u>Esempio</u> (si riprenda l'<u>esercizio svolto</u> per il caso di <u>diagonalizzazione con autovalori complessi</u>)

Calcolare la risposta libera del sistema

$$\dot{x}(t) = A\,x(t), \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

con condizione iniziale $x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

<u>Soluzione</u>

Nella soluzione dell'esercizio svolto abbiamo visto che:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) & 0 \\ -\sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = T e^{\tilde{A}t} \alpha$$

dove α è la soluzione del sistema lineare $T\alpha = x_0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

(prima matrice: T | x_0)

scambio riga 1 e riga 2

riga2 $\leftarrow$ − riga2
riga3 $\leftarrow$ riga3 − riga1

8

sistema $\begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) & 0 \\ -\sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos(2t)+\sin(2t) \\ \sin(2t)+\cos(2t) \\ 2e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(2t)-\cos(2t) \\ -\cos(2t)+\sin(2t) \\ -\cos(2t)+\sin(2t)+2e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}.$$

Verifica

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_0 \qquad \text{ok}$$

$x(t)$ calcolata per $t=0$.

ANALISI MODALE

Definizione - Dato il sistema lineare stazionario a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = A x(t)$$

si dicono MODI DEL SISTEMA tutte le funzioni differenti che si trovano nell'esponenziale $e^{\tilde{A}t}$ di una forma di Jordan reale a blocchi $\tilde{A}$ della matrice A.

esempio

$$\dot{x}(t) = A x(t) \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(vedere l'esercizio svolto per il caso di jordanizzazione)

$$\Rightarrow \tilde{A} = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad e^{\tilde{A}t} = \left[\begin{array}{c|cc} e^{-t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & e^{2t} & e^{2t}t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{array}\right]$$

- forma di Jordan reale a blocchi di A -

I modi del sistema sono: $e^{2t}, e^{2t}t, e^{-t}$.

Definizione - Dato il sistema lineare stazionario a tempo discreto

$$x(k+1) = A x(k)$$

si dicono MODI DEL SISTEMA tutte le successioni differenti che si trovano nella potenza $\tilde{A}^k$ di una forma di Jordan reale a blocchi $\tilde{A}$ della matrice A.

esempio

$$x(k+1) = A x(k) \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(vedere l'esercizio svolto per il caso di diagonalizzazione con autovalori complessi)

$$\Rightarrow \tilde{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \tilde{A}^k = \left[\begin{array}{cc|c} 2^k\cos(k\frac{\pi}{2}) & 2^k\sin(k\frac{\pi}{2}) & 0 \\ -2^k\sin(k\frac{\pi}{2}) & 2^k\cos(k\frac{\pi}{2}) & 0 \\ \hline 0 & 0 & (\frac{1}{2})^k \end{array}\right]$$

- forma di Jordan reale a blocchi di A -

I modi del sistema sono: $2^k\sin(k\frac{\pi}{2})$, $2^k\cos(k\frac{\pi}{2})$, $(\frac{1}{2})^k$.

Vediamo ora quali possono essere tutti e soli i modi di un sistema lineare stazionario...

Tempo Continuo

- autovalore reale λ

  I modi determinati dall'autovalore λ sono del tipo:

  $$e^{\lambda t},\ e^{\lambda t}t,\ e^{\lambda t}\frac{t^2}{2},\ \dots,\ e^{\lambda t}\frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!}$$

  dove ℓ è la dimensione del più grande blocco di Jordan relativo a λ.

  - se $\lambda<0$: tutti i modi sono convergenti a 0 per $t\to\infty$
  - se $\lambda>0$: tutti i modi sono divergenti per $t\to\infty$
  - se $\lambda=0$:
    * il modo $e^{\lambda t}=e^{0\cdot t}=1$ è limitato per ogni t
    * i modi $e^{\lambda t}\frac{t^h}{h!}=e^{0\cdot t}\frac{t^h}{h!}=\frac{t^h}{h!}$ con $h=1,\dots,\ell-1$ sono divergenti per $t\to\infty$

- autovalore complesso $\lambda=\sigma+i\omega$ con $\omega>0$

  I modi determinati dall'autovalore λ (e dal suo coniugato λ^*) sono del tipo:

  $$e^{\sigma t}\sin(\omega t),\ e^{\sigma t}t\sin(\omega t),\ e^{\sigma t}\frac{t^2}{2}\sin(\omega t),\ \dots,\ e^{\sigma t}\frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\sin(\omega t)$$

(e analoghi con $\cos(\omega t)$), dove ℓ è la dimensione del più grande blocco di Jordan relativo a λ.

- se $\sigma<0$: tutti i modi sono convergenti a 0 per $t\to\infty$
- se $\sigma>0$: tutti i modi sono divergenti per $t\to\infty$
- se $\sigma=0$:
  * il modo $e^{\sigma t}\sin(\omega t)=e^{0\cdot t}\sin(\omega t)=\sin(\omega t)$ è limitato per ogni t
  * i modi $e^{\sigma t}\frac{t^h}{h!}\sin(\omega t)=e^{0\cdot t}\frac{t^h}{h!}\sin(\omega t)=\frac{t^h}{h!}\sin(\omega t)$ con $h=1,\dots,\ell-1$ sono divergenti per $t\to\infty$.

Tempo Discreto

- autovalore reale λ

I modi determinati dall'autovalore λ sono del tipo:

$$\lambda^k,\ \lambda^{k-1}\underbrace{\binom{k}{1}}_{k},\ \lambda^{k-2}\underbrace{\binom{k}{2}}_{\frac{k(k-1)}{2}},\ \dots,\ \lambda^{k-\ell+1}\underbrace{\binom{k}{\ell-1}}_{\frac{k(k-1)\dots(k-\ell+2)}{(\ell-1)!}}$$

dove ℓ è la dimensione del più grande blocco di Jordan relativo a λ.

NOTA- Coefficiente binomiale $\binom{k}{h}=\frac{k!}{h!(k-h)!}=\frac{k(k-1)\dots(k-h+1)}{h!}$

- se $|\lambda|<1$: tutti i modi sono convergenti a 0 per $k\to\infty$
- se $|\lambda|>1$: tutti i modi sono divergenti per $k\to\infty$
- se $|\lambda|=1$:
  * il modo λ^k [che può essere $1^k=1$ o $(-1)^k$] è limitato per ogni k
  * i modi $\lambda^{k-h}\binom{k}{h}$ [che possono essere $\binom{k}{h}$ o $(-1)^{k-h}\binom{k}{h}$] con $h=1,\dots,\ell-1$ sono divergenti per $k\to\infty$.

- autovalore complesso $\lambda = \rho e^{i\theta}$ con $\rho > 0$ e $\theta \in (0, \pi)$

I modi determinati dall'autovalore λ (e dal suo coniugato λ^*) sono del tipo:

$$\rho^k \sin(k\theta),\ \rho^{k-1}\binom{k}{1}\sin(k\theta),\ \rho^{k-2}\binom{k}{2}\sin(k\theta),\ \dots,\ \rho^{k-\ell+1}\binom{k}{\ell-1}\sin(k\theta)$$

(e analoghi con $\cos(k\theta)$), dove ℓ è la dimensione del più grande blocco di Jordan relativo a λ.

- se $\rho < 1$: tutti i modi sono convergenti a 0 per $k \to \infty$
- se $\rho > 1$: tutti i modi sono divergenti per $k \to \infty$
- se $\rho = 1$:
  - * il modo $\rho^k \sin(k\theta) = \sin(k\theta)$ è limitato per ogni k
  - * i modi $\rho^k \binom{k}{h}\sin(k\theta) = \binom{k}{h}\sin(k\theta)$ con $h = 1, \dots, \ell-1$ sono divergenti per $k \to \infty$.

ALGEBRICAMENTE EQUIVALENTI

Il procedimento che abbiamo finora seguito per il calcolo di e^{At} e A^k:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\times"] \arrow[d] & e^{At}, A^k \\
\tilde{A} \arrow[r] & e^{\tilde{A}t}, \tilde{A}^k \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

è solo un artificio algebrico, oppure possiede un'interpretazione fisica?

Tempo Continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

x è lo stato del sistema.

Data $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolare, definiamo un nuovo stato:

$$z = T^{-1}x$$

Qual è l'equazione dinamica che regola l'evoluzione di z?

$$\dot{z}(t) = T^{-1}\dot{x}(t) = T^{-1}\left[Ax(t) + Bu(t)\right] =$$

$$= T^{-1}Ax(t) + T^{-1}Bu(t) = T^{-1}ATz(t) + T^{-1}Bu(t)$$

$$= \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t) \qquad x(t) = Tz(t)$$

avendo posto: $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}B$.

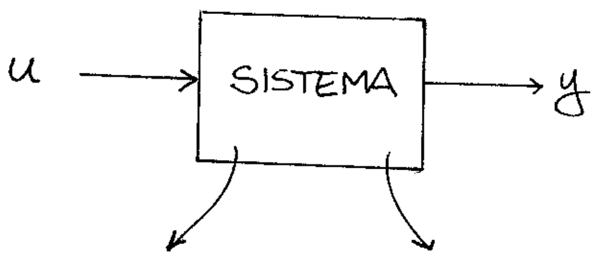
Inoltre:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = CTz(t) + Du(t)$$

$$= \tilde{C}z(t) + \tilde{D}u(t)$$

avendo posto: $\tilde{C} = CT$, $\tilde{D} = D$.

interpretazione



rappresentazione con stato x

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

rappresentazione con stato z

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) = \tilde{C}z(t) + \tilde{D}u(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

Le due rappresentazioni sono algebricamente equivalenti se esiste T non singolare tale che:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{A} &= T^{-1}AT\\ \tilde{B} &= T^{-1}B\\ \tilde{C} &= CT\\ \tilde{D} &= D\\ x_0 &= Tz_0\end{aligned}\right\}\quad (*)$$

<u>COROLLARIO</u> – Lo stato di un sistema <u>non</u> e' unico.

<u>Tempo Discreto</u>

Ragionamenti assolutamente analoghi possono essere ripetuti a tempo discreto.

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Data $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ <u>non singolare</u>, definiamo un <u>nuovo stato</u>:

$$z = T^{-1}x$$

L'equazione dinamica che regola l'evoluzione di z si ottiene semplicemente:

$$z(k+1) = T^{-1}x(k+1) = T^{-1}\left[Ax(k)+Bu(k)\right] =$$

$$= T^{-1}Ax(k) + T^{-1}Bu(k) \underset{x(k)=Tz(k)}{=} T^{-1}ATz(k) + T^{-1}Bu(k)$$

$$= \tilde{A}z(k) + \tilde{B}u(k)$$

avendo posto $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}B$.

Per l'equazione di uscita si ricava ancora:

$$y(k) = \tilde{C}z(k) + \tilde{D}u(k)$$

avendo posto $\tilde{C} = CT$, $\tilde{D} = D$.

L'equivalenza algebrica delle due rappresentazioni:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z(k+1) = \tilde{A}z(k) + \tilde{B}u(k) \\ y(k) = \tilde{C}z(k) + \tilde{D}u(k) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

si ha dunque ancora se e solo se esiste T non singolare tale che valgono le relazioni $(*)$.

Quello che abbiamo fatto finora e' stato determinare una trasformazione dello stato del sistema in un nuovo stato rispetto al quale fosse piu' "facile" calcolare la risposta libera. Infatti:

risposta libera in z

$$z(t) = e^{\tilde{A}t} z_0 \qquad \text{TC}$$

$$z(k) = \tilde{A}^k z_0 \qquad \text{TD}$$

Applicando la trasformazione $z = T^{-1}x$, per cui:

- $z_0 = T^{-1}x_0$
- $x = Tz$

otteniamo:

$$x(t) = Tz(t) = Te^{\tilde{A}t} z_0 = \underbrace{Te^{\tilde{A}t}T^{-1}}_{e^{At}} x_0 \qquad \text{TC}$$

$$x(k) = Tz(k) = T\tilde{A}^k z_0 = \underbrace{T\tilde{A}^k T^{-1}}_{A^k} x_0 \qquad \text{TD}$$