

ESERCIZIO

1

Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase della funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{(s-1)(s+10)}{s(s^2+s+16)}$$

1° passo

Verifichiamo se s^2+s+16 ha radici reali o complesse coniugate.

$$\Delta = 1 - 64 = -63 < 0 \Rightarrow \text{radici complesse coniugate}$$

$\Rightarrow s^2+s+16$ NON può essere scomposto nella forma $(s+a)(s+b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

2° passo

Portiamo $W(s)$ in forma di Bode.

$$W(s) = \frac{(-1)10}{16} \frac{(1-s)\left(1+\frac{s}{10}\right)}{s\left(1+\frac{s}{16}+\frac{s^2}{16}\right)} = \frac{k_b}{s} \cdot \frac{(1-\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

dove:

$$\bullet k_b = -\frac{5}{8}$$

$$\bullet \tau_1 = 1$$

$$\bullet \tau_2 = \frac{1}{10}$$

$$\bullet \omega_n^2 = 16 \Rightarrow \omega_n = 4$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{1}{16} \Rightarrow \zeta = \frac{\omega_n}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

3° passo

I punti di rottura del diagramma sono:

$$\bullet \frac{1}{\tau_1} = 1$$

$$\bullet \omega_n = 4$$

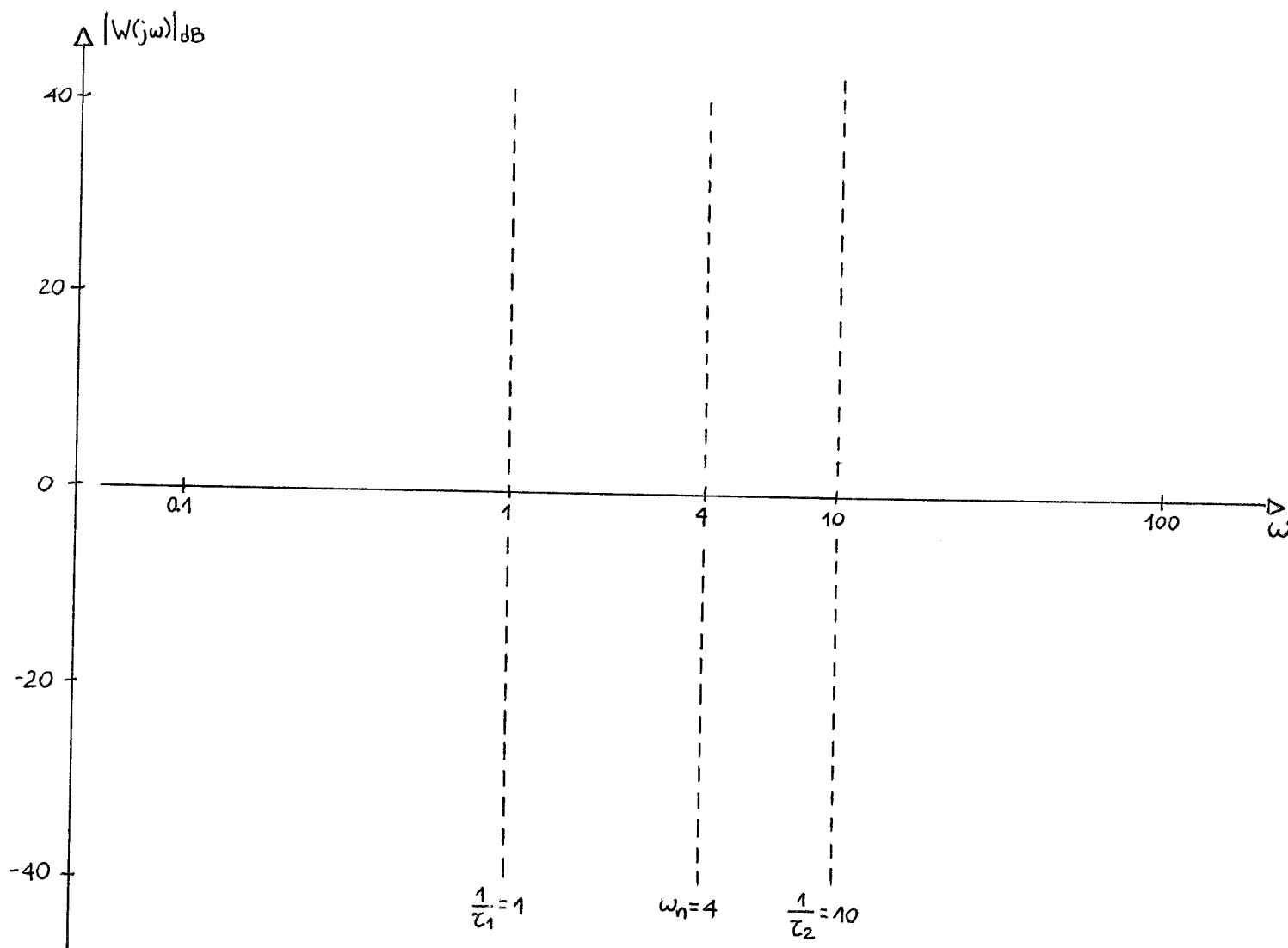
$$\bullet \frac{1}{\tau_2} = 10$$

~> TRACCIAMO IL DIAGRAMMA DI BODE DEL MODULO...

1. Dividiamo il diagramma in settori

②

I 3 punti di rottura dividono il diagramma in 4 settori...

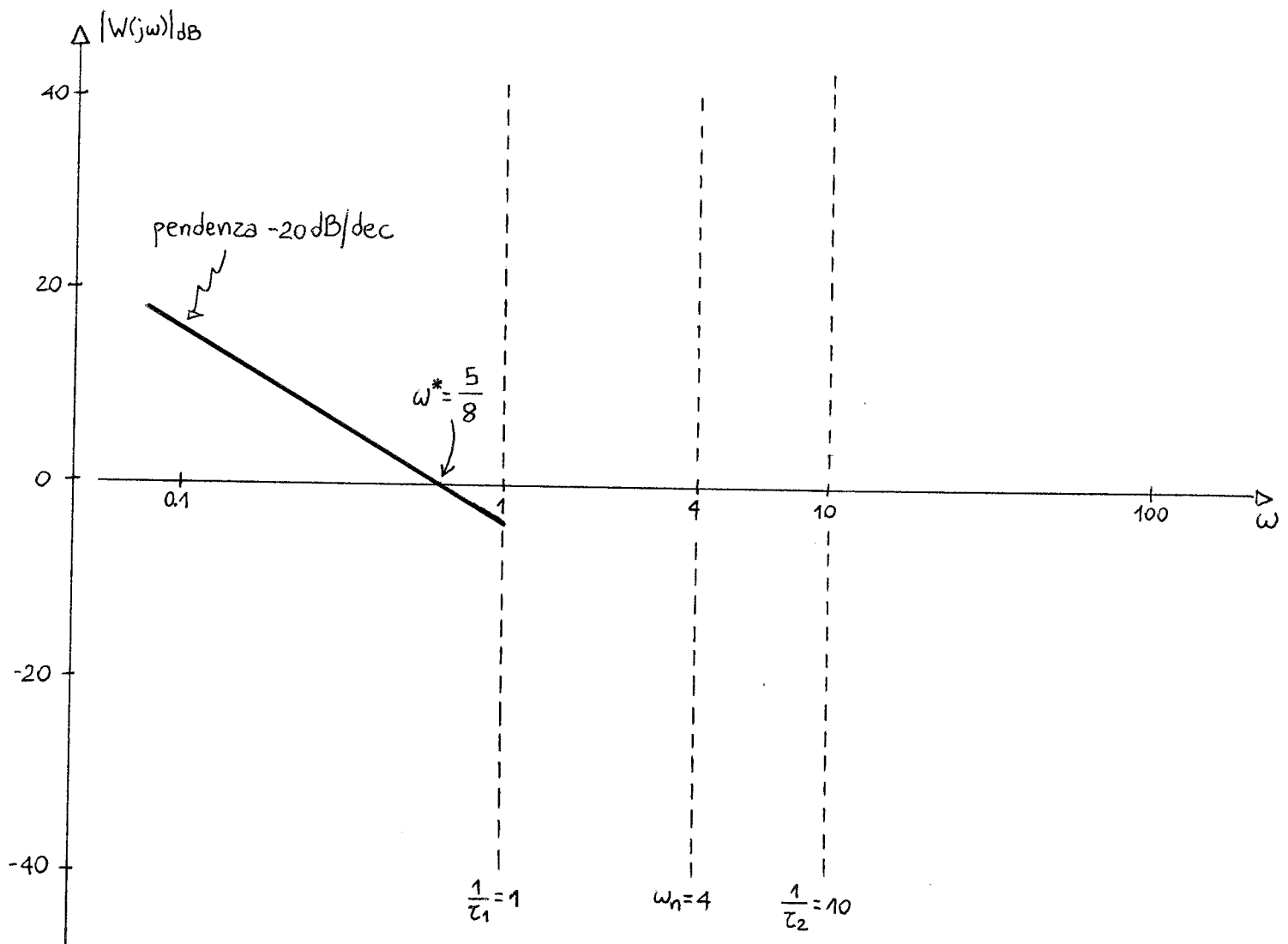


La regola è che ciascun termine in cui è stata scomposta la funzione di trasferimento $W(s)$ entra in gioco solo dopo il corrispondente punto di rottura, quando si traccia il diagramma asintotico...

2. Se $\omega < \frac{1}{\tau_1} = 1$, l'unico contributo è quello di $\frac{k_b}{s}$.

3

"Facciamo finta" che in questo settore la f.d.t. sia $W_1(s) = \frac{k_b}{s}$



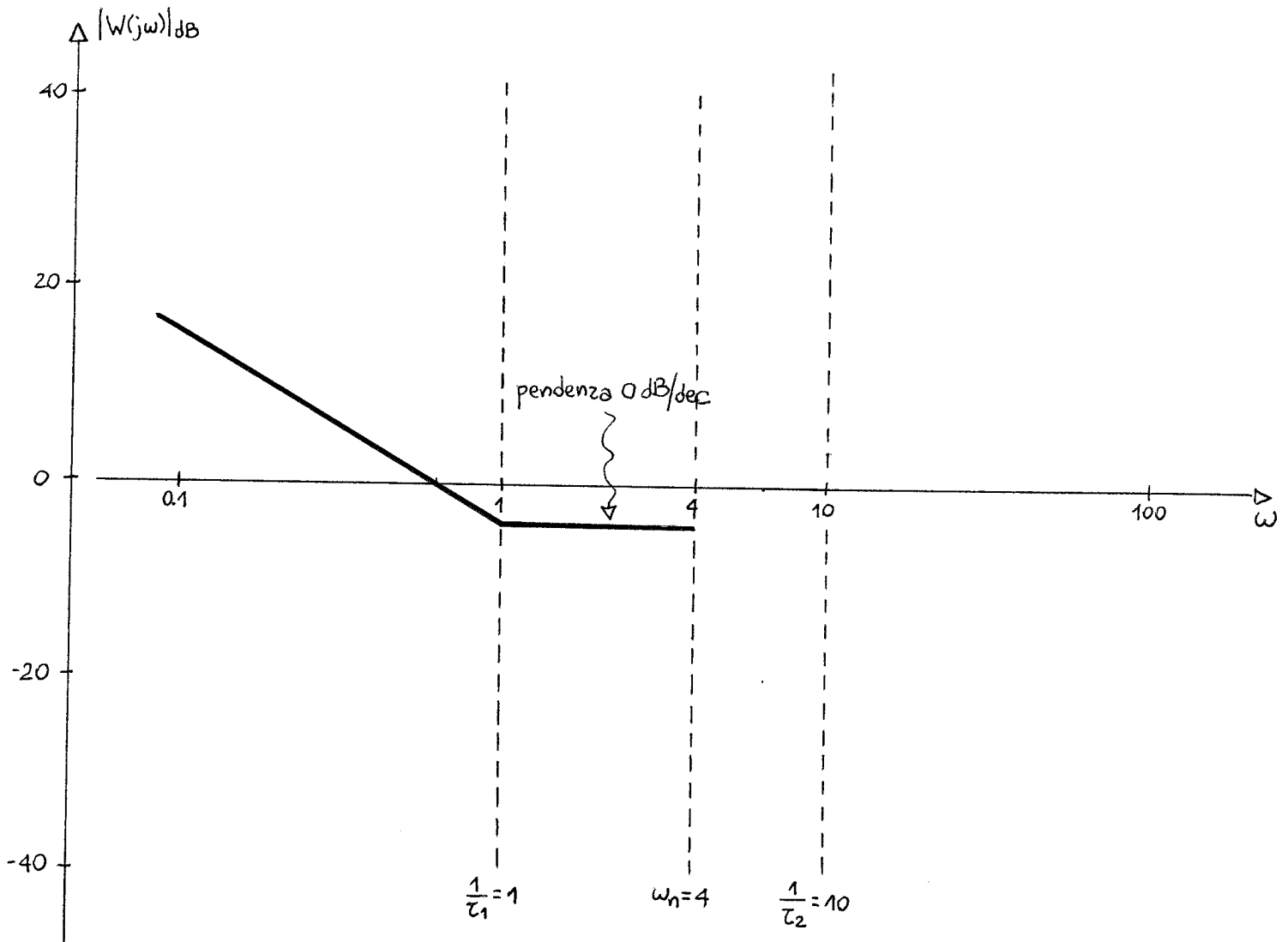
Il contributo al diagramma del termine $\frac{k_b}{s}$ è una retta con pendenza -20dB/dec , di cui dobbiamo determinare l'intersezione con l'asse delle ascisse.

$$\left| \frac{k_b}{s} \right|_{s=j\omega} = 1 \Rightarrow \frac{|k_b|}{\omega} = 1 \Rightarrow \omega^* = |k_b| = \frac{5}{8}$$

per poterla posizionare correttamente sul grafico...

3. Se $\frac{1}{\tau_1} \leq \omega < \omega_n$ ($1 \leq \omega < 4$), i contributi "attivi" sono quelli di $\frac{k_b}{s}$ e $(1-\tau_1 s)$. (4)

"Facciamo finta" che in questo settore la f.d.t. sia $W_2(s) = W_1(s) \cdot (1-\tau_1 s)$.



$$W_2(s) = \frac{k_b}{s} \cdot (1 - \tau_1 s)$$

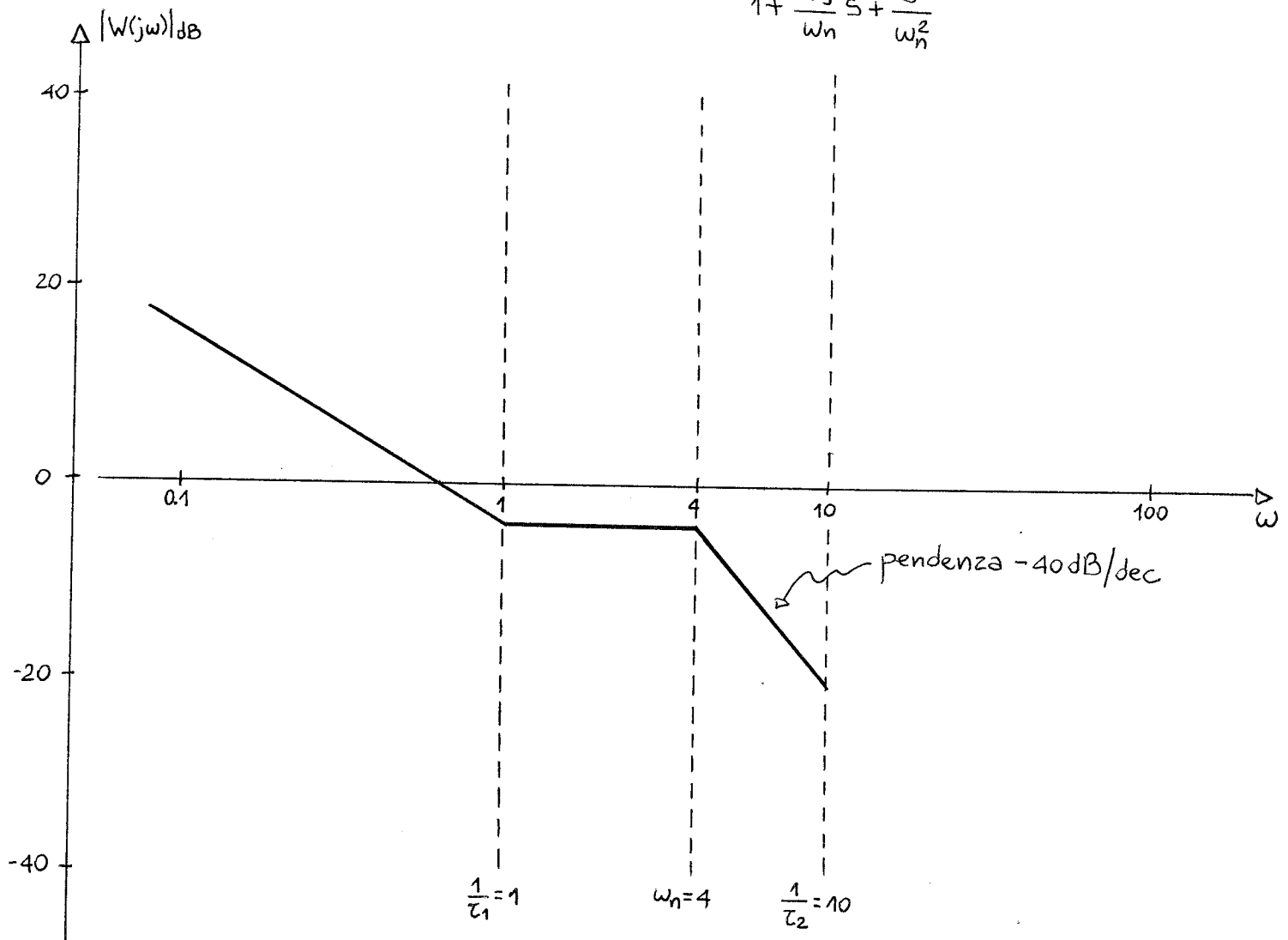
$\frac{k_b}{s}$ → contributo -20 dB/dec
 $(1 - \tau_1 s)$ → contributo +20 dB/dec

Il contributo complessivo è: $-20 + 20 = 0$ dB/dec

4. Se $\omega_n \leq \omega < \frac{1}{\tau_2}$ ($4 \leq \omega < 10$), i contributi "attivi" sono quelli di $\frac{k_b}{s}$, $(1-\tau_1 s)$ (5)

e $\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$. "Facciamo finta" che in questo settore la f.d.t. sia

$$W_3(s) = W_2(s) \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$



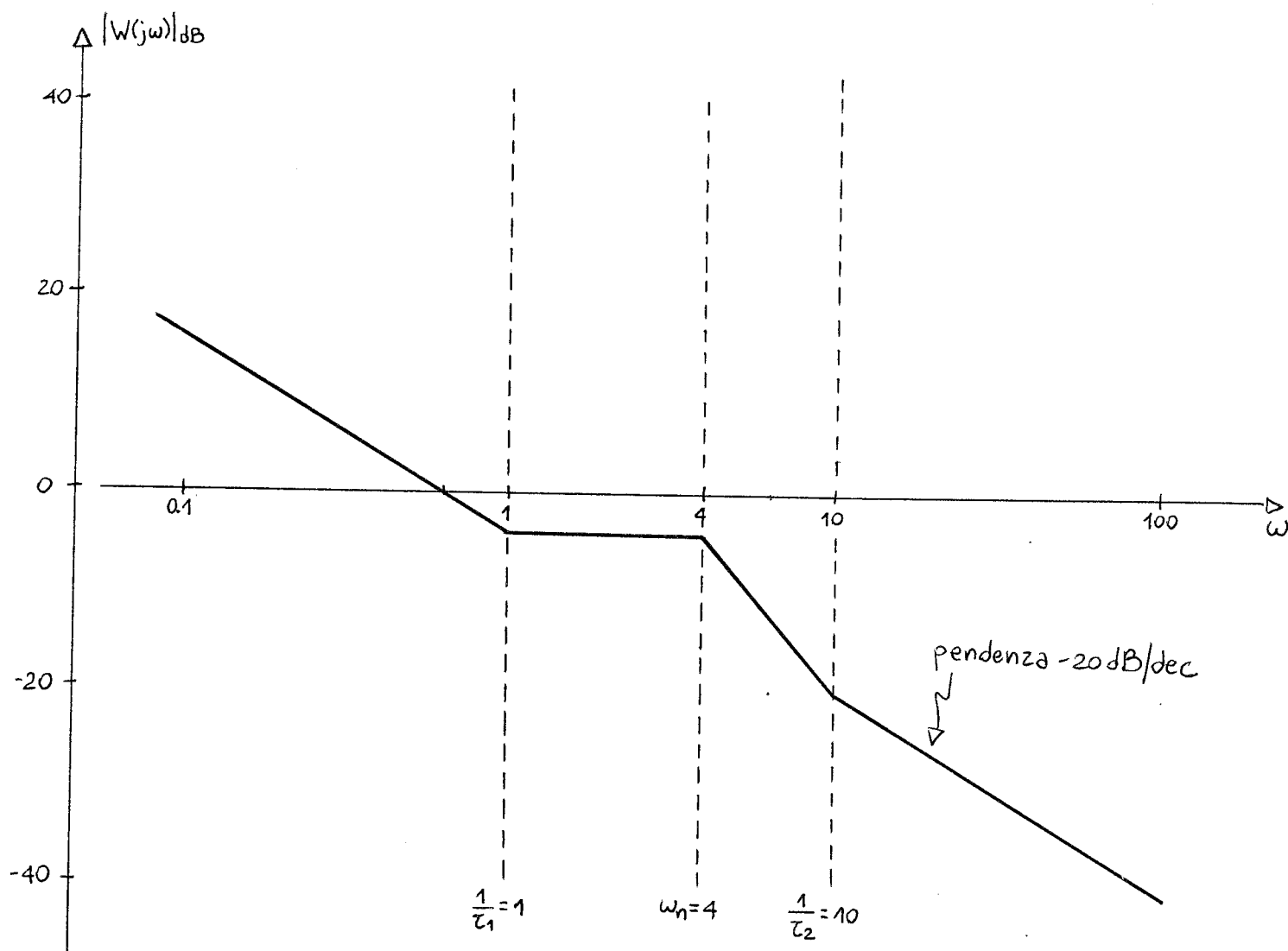
$$W_3(s) = \underbrace{\frac{k_b}{s}}_{\text{contributo } -20 \text{ dB/dec}} \cdot \underbrace{(1-\tau_1 s)}_{\text{contributo } +20 \text{ dB/dec}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}}_{\text{contributo } -40 \text{ dB/dec}}$$

Il contributo complessivo è: $-20 + 20 - 40 = -40 \text{ dB/dec}$.

5. Se $\omega \geq \frac{1}{\tau_2} = 10$, tutti i termini danno contributo "attivo".

(6)

In questo settore la f.d.t. che consideriamo coincide con tutta $W(s)$.



$$W(s) = \underbrace{\frac{k_b}{s}}_{\text{contributo } -20 \text{ dB/dec}} \cdot \underbrace{(1 - \tau_1 s)}_{\text{contributo } +20 \text{ dB/dec}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}}_{\text{contributo } -40 \text{ dB/dec}} \cdot \underbrace{(1 + \tau_2 s)}_{\text{contributo } +20 \text{ dB/dec}}$$

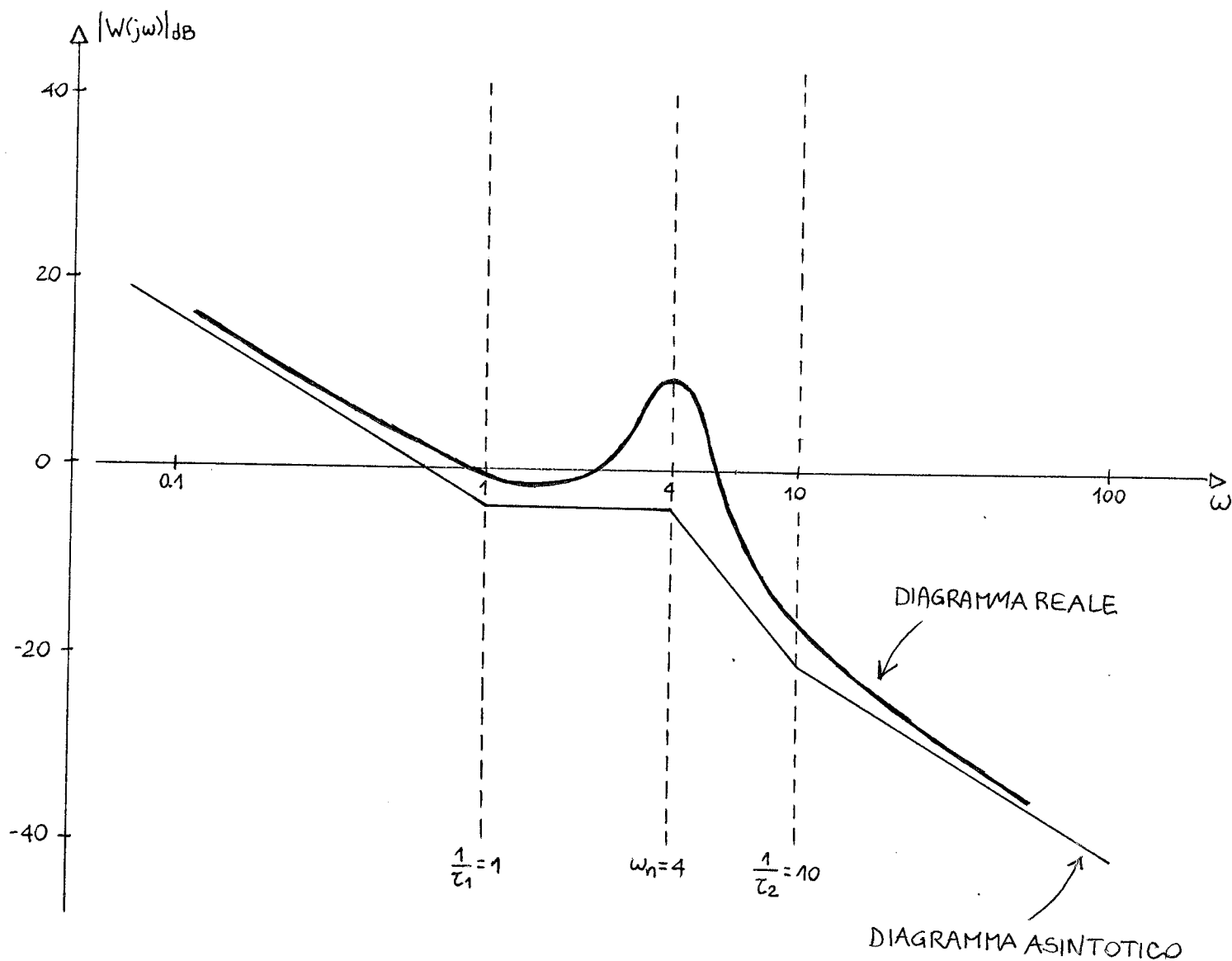
Il contributo complessivo è: $-20 + 20 - 40 + 20 = -20 \text{ dB/dec}$.

Abbiamo tracciato il DIAGRAMMA ASINTOTICO del modulo...

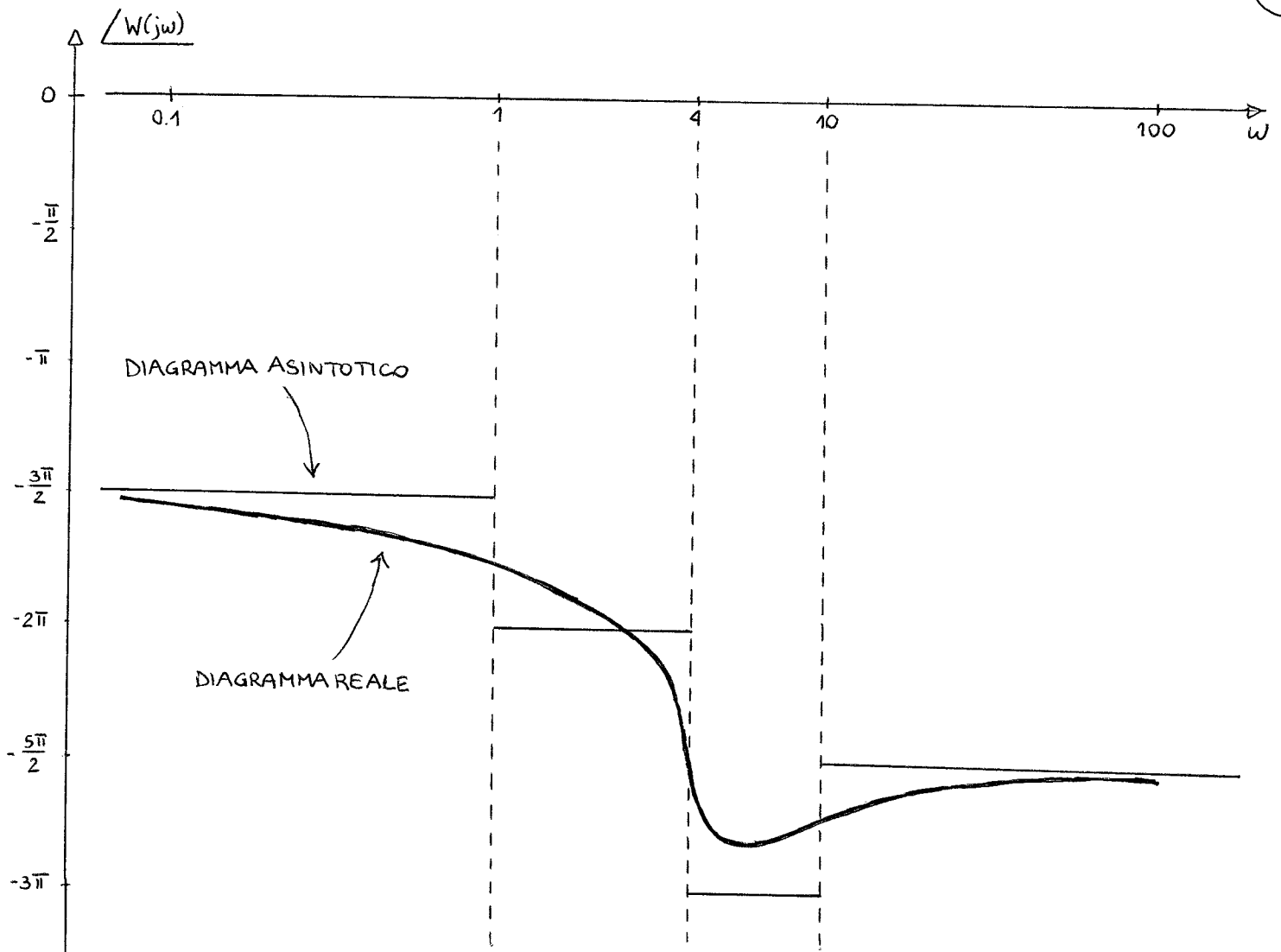
6. Correzione del diagramma

7

ATTENZIONE - In $\omega \approx \omega_n$ dobbiamo considerare la "gobbetta" dovuta al coefficiente di smorzamento ζ ...



~> TRACCIAMO ORA IL DIAGRAMMA DI BODE DELLA FASE,
UTILIZZANDO LO STESSO METODO...



- Se $w < \frac{1}{T_1} = 1$,

$$W_1(s) = \frac{k_b}{s}$$

$\nearrow k_b < 0 \Rightarrow \text{contributo } -\pi$
 $\searrow \text{contributo } -\frac{\pi}{2}$

Il contributo complessivo e^- : $-\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$

- Se $\frac{1}{T_1} \leq w < w_n$ ($1 \leq w < 4$),

$$W_2(s) = W_1(s) (1 - T_1 s)$$

$\nwarrow \text{contributo } -\frac{3\pi}{2}$ $\nearrow \text{zero instabile} \Rightarrow \text{contributo } -\frac{\pi}{2}$

Il contributo complessivo e^- : $-\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -2\pi$

- Se $\omega_n \leq \omega < \frac{1}{\tau_2}$ ($4 \leq \omega < 10$),

$$W_3(s) = W_2(s) \left(\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \right)$$

contributo -2π

coppia di poli complessi coniugati stabili $\Rightarrow$ contributo $-\pi$

Il contributo complessivo e^- : $-2\pi - \pi = -3\pi$.

- Se $\omega \geq \frac{1}{\tau_2} = 10$,

$$W(s) = W_3(s) (1 + \tau_2 s)$$

contributo -3π

zero stabile $\Rightarrow$ contributo $+\frac{\pi}{2}$

Il contributo complessivo e^- : $-3\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}$.

Esercizio 1

1

Data la funzione di trasferimento $W(s) = \frac{100(s-0.2)}{(s+0.8)(s^2-2s+100)}$,

tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della corrispondente funzione di risposta armonica $W(i\omega)$.

Innanzitutto, verifichiamo se $s^2-2s+100$ ha radici reali.

$$\Delta = 4 - 400 = -396 < 0 \Rightarrow \text{radici complesse}$$

Quindi $s^2-2s+100$ non può essere scomposto ulteriormente.

Portiamo $W(s)$ in forma di Bode:

$$W(s) = \frac{100 \cdot (-0.2)}{0.8 \cdot 100} \frac{1 - \frac{s}{0.2}}{\left(1 + \frac{s}{0.8}\right) \left(1 - \frac{s}{50} + \frac{s^2}{100}\right)} = k_b \frac{1 + \tau_1 s}{(1 + \tau_2 s) \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}$$

-0.25

dove:

$$k_b = -0.25, \quad \tau_1 = -\frac{1}{0.2} = -5, \quad \tau_2 = \frac{1}{0.8} = 1.25, \quad \omega_n^2 = 100 \Rightarrow \omega_n = 10$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} = -\frac{1}{50} \Rightarrow \zeta = -\frac{\omega_n}{100} = -\frac{10}{100} = -0.1$$

I punti di rottura dei grafici sono, in ordine crescente:

$$\frac{1}{|\tau_1|} = 0.2, \quad \frac{1}{\tau_2} = 0.8, \quad \omega_n = 10.$$

Essi dividono i grafici in quattro settori:

1° settore: $\omega \leq \frac{1}{|\tau_1|}$

L'unico contributo è quello di k_b .

modulo: costante al valore $20 \log_{10} |k_b| = 20 \log_{10} (0.25) \approx -12.04$

fase: $-\pi$

↑ contributo di $k_b < 0$

2° settore: $\frac{1}{|\tau_1|} < \omega \leq \frac{1}{\tau_2}$

Si aggiunge il contributo di $1 + \tau_1 s$

modulo: pendenza $+20 \text{ dB/decade}$

fase: $-\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi$

↑
contributo
di k_b

↑
contributo
di $1 + \tau_1 s$
con $\tau_1 < 0$

3° settore: $\frac{1}{\tau_2} < \omega \leq \omega_n$

Si aggiunge il contributo di $\frac{1}{1 + \tau_2 s}$

modulo: pendenza $+20 - 20 = 0 \text{ dB/decade}$

↑
contributo
di $k_b(1 + \tau_1 s)$

↑
contributo di $\frac{1}{1 + \tau_2 s}$

fase: $-\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2} = -2\pi$

↑
contributo
di $k_b(1 + \tau_1 s)$

↑
contributo di $\frac{1}{1 + \tau_2 s}$
con $\tau_2 > 0$

4° settore: $\omega > \omega_n$

Si aggiunge il contributo di $\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$

modulo: pendenza $0 - 40 = -40 \text{ dB/decade}$

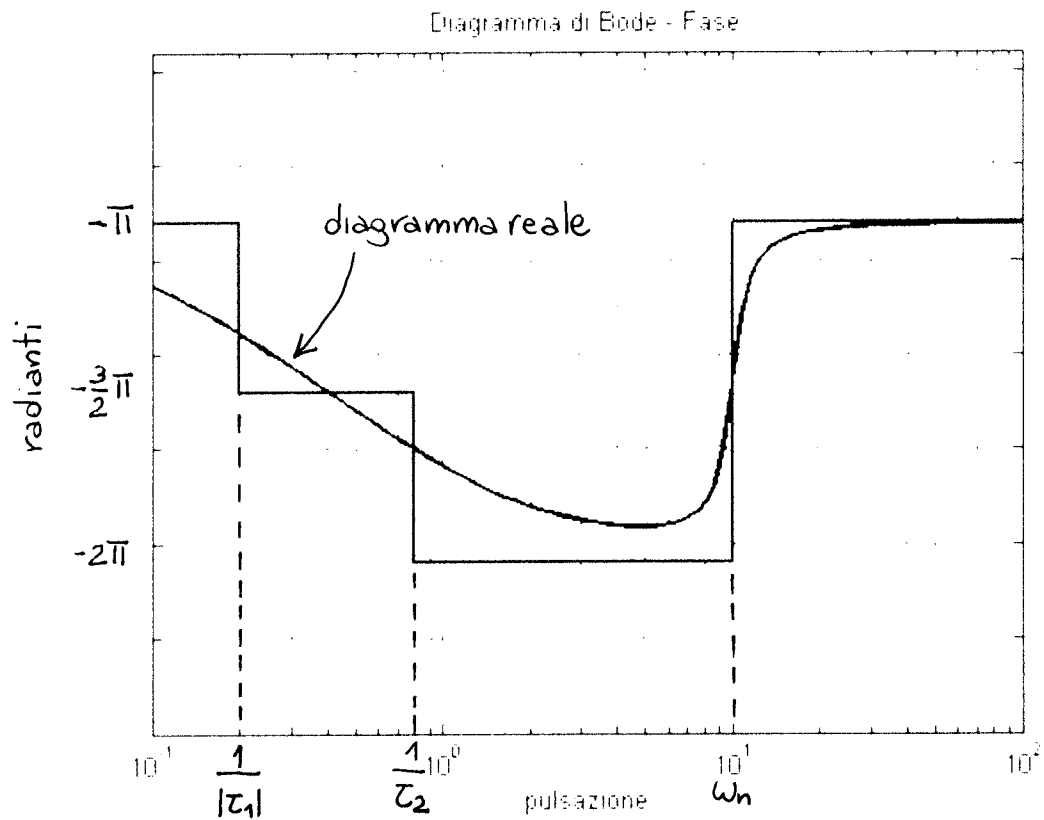
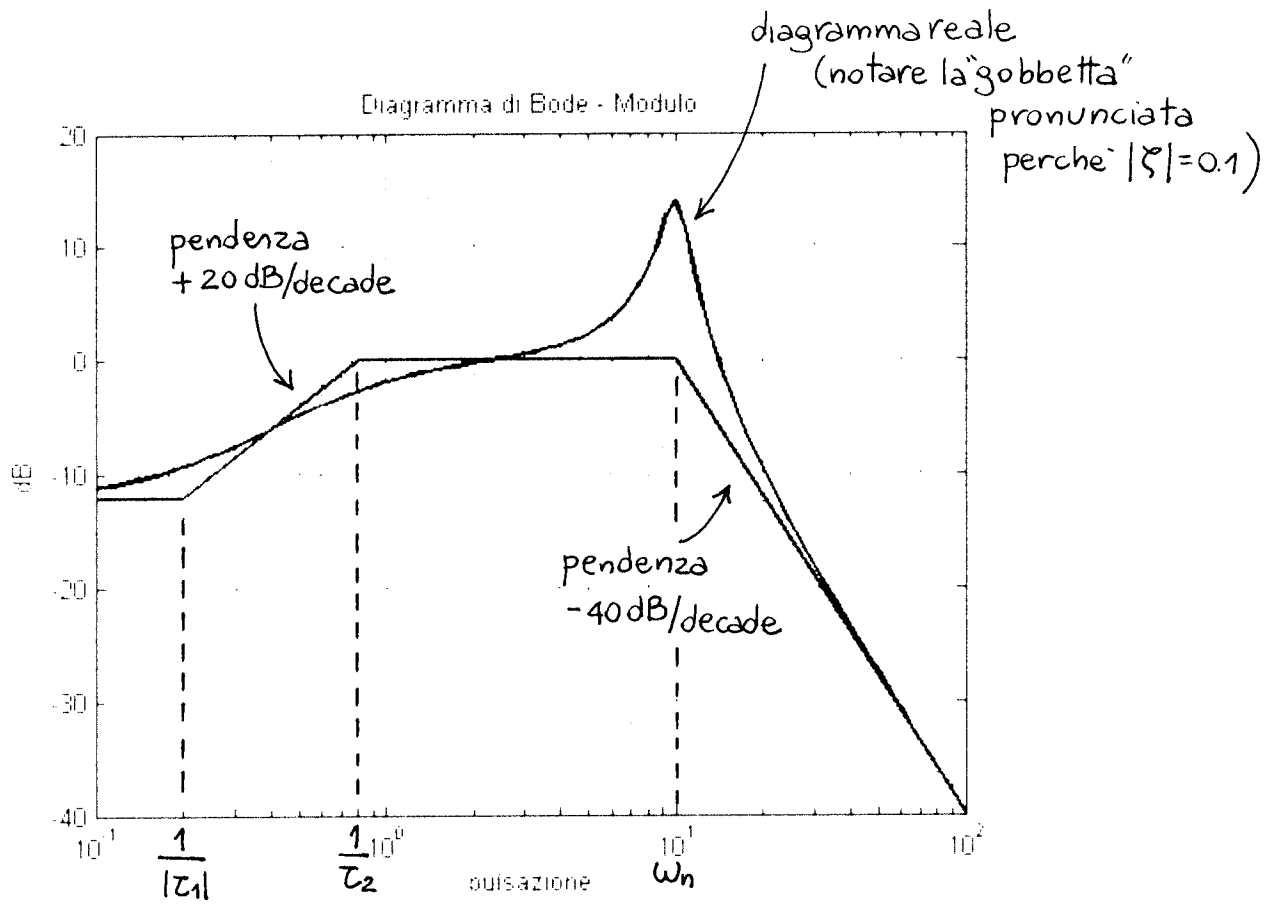
↑
contributo
di $\frac{k_b(1 + \tau_1 s)}{1 + \tau_2 s}$

↑
contributo di $\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$

fase: $-2\pi + \pi = -\pi$

↑
contributo
di $\frac{k_b(1 + \tau_1 s)}{1 + \tau_2 s}$

↑
contributo di $\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$ con $-1 < \zeta < 0$



Esercizio 2

4

Data la funzione di trasferimento $W(s) = \frac{s^2 + 3.2s + 16}{s^2(s - 40)}$,

tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della corrispondente funzione di risposta armonica $W(j\omega)$.

Innanzitutto, verifichiamo se $s^2 + 3.2s + 16$ ha radici reali.

$$\Delta = 10.24 - 64 = -53.76 < 0 \Rightarrow \text{radici complesse}$$

Quindi $s^2 + 3.2s + 16$ non può essere scomposto ulteriormente.

Portiamo $W(s)$ in forma di Bode:

$$W(s) = \underbrace{\left(\frac{16}{-40} \right)}_{-0.4} \frac{1 + \frac{s}{5} + \frac{s^2}{16}}{s^2 \left(1 - \frac{s}{40} \right)} = \frac{k_b}{s^2} \frac{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + \tau s}$$

dove:

$$k_b = -0.4, \quad \tau = -\frac{1}{40} = -0.025, \quad \omega_n^2 = 16 \Rightarrow \omega_n = 4,$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{1}{5} \Rightarrow \zeta = \frac{\omega_n}{10} = \frac{4}{10} = 0.4$$

I punti di rottura dei grafici sono, in ordine crescente:

$$\omega_n = 4, \quad \frac{1}{|\tau|} = 40$$

Essi dividono i grafici in tre settori:

1° settore: $\omega \leq \omega_n$

L'unico contributo è quello di $\frac{k_b}{s^2}$

modulo: la pendenza è -40 dB/decade . Tuttavia, per posizionare correttamente l'asintoto, ci occorre anche l'intersezione con l'asse delle ascisse (0 dB). Abbiamo:

$$\left| \frac{k_b}{(j\omega)^2} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|k_b|}{\omega^2} = 1 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{|k_b|} = 0.63 \triangleq \omega^*$$

fase: dato che $k_b < 0$ e $h=2$, dalla tabella dei contributi asintotici otteniamo il valore $-\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{2} = -2\pi$.

2° settore: $\omega_n < \omega \leq \frac{1}{|\tau|}$

Si aggiunge il contributo di $1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$

modulo: pendenza $-40 + 40 = 0$ dB/decade

contributo di $\frac{k_b}{s^2}$ contributo di $1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$

fase: $-2\pi + \pi = -\pi$

contributo di $\frac{k_b}{s^2}$ contributo di $1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$ con $0 < \zeta < 1$

3° settore: $\omega > \frac{1}{|\tau|}$

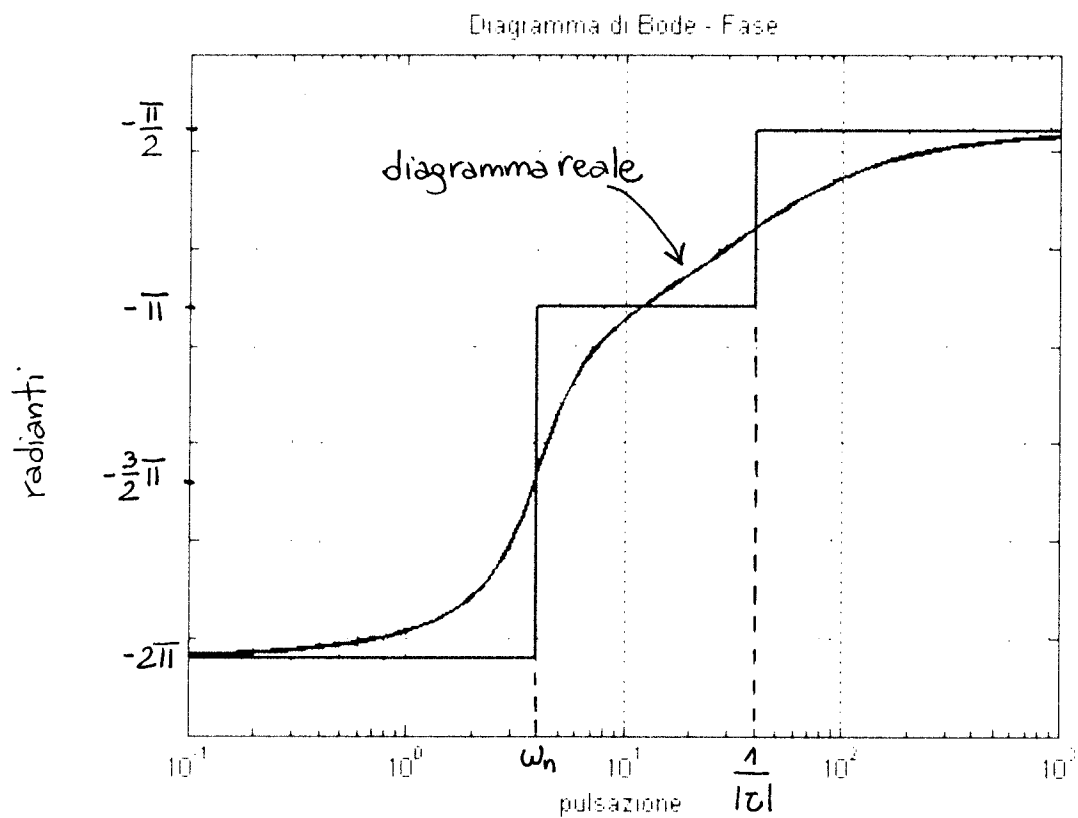
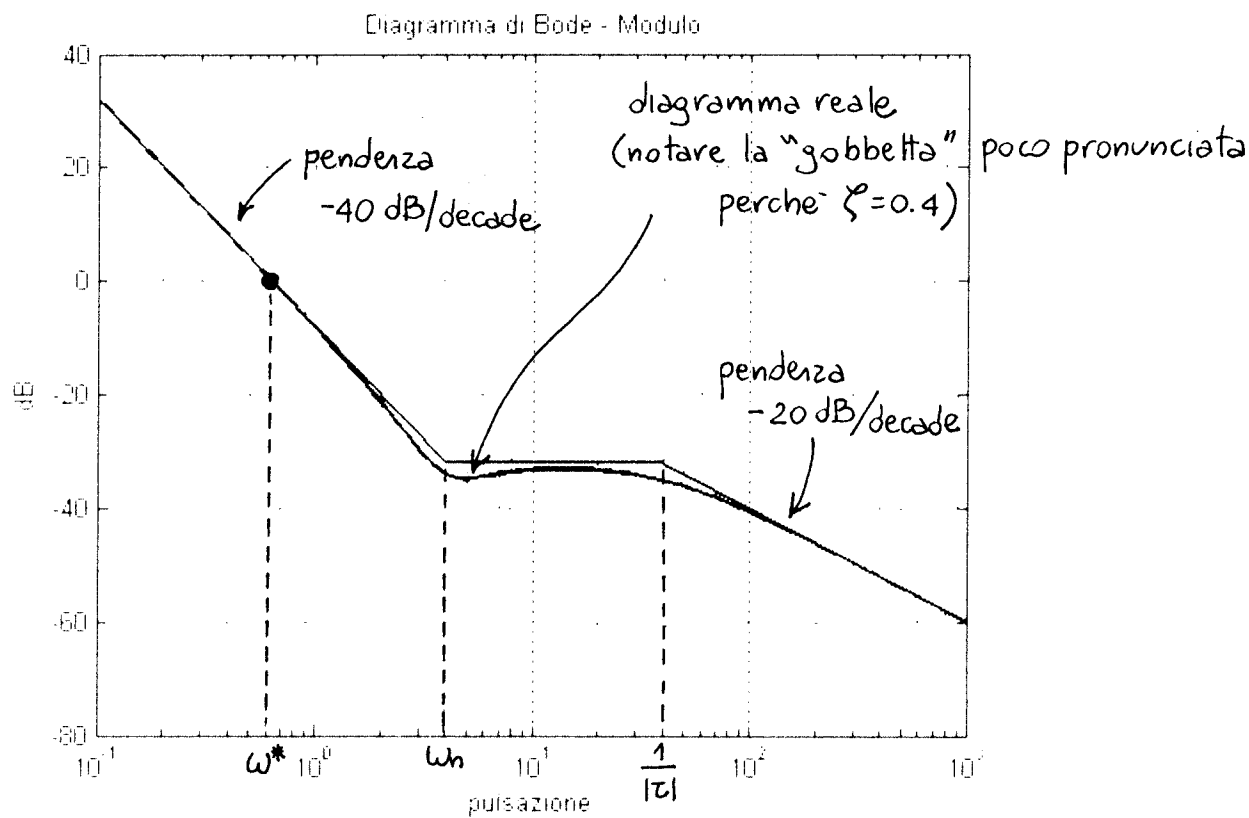
Si aggiunge il contributo di $\frac{1}{1+\tau s}$

modulo: pendenza $0 - 20 = -20$ dB/decade

contributo di $\frac{k_b (1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2})}{s^2}$ contributo di $\frac{1}{1+\tau s}$

fase: $-\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

contributo di $\frac{k_b (1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2})}{s^2}$ contributo di $\frac{1}{1+\tau s}$ con $\tau < 0$

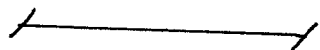


Esercizio 3

7

Data la funzione di trasferimento $W(s) = \frac{1000 \cdot s (s^2 + 0.04)}{(s+1)(s+8)^2}$,

tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della corrispondente funzione di risposta armonica $W(i\omega)$.



Il fattore $s^2 + 0.04$ ha radici immaginarie pure, e non può essere scomposto ulteriormente.

Portiamo $W(s)$ in forma di Bode:

$$W(s) = \underbrace{\frac{1000 \cdot 0.04}{8^2}}_{0.625} \frac{s \left(1 + \frac{s^2}{0.04}\right)}{(1+s)(1+\frac{s}{8})^2} = k_b \frac{s \left(1 + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)^2}$$

dove:

$$k_b = 0.625, \tau_1 = 1, \tau_2 = \frac{1}{8} = 0.125, \omega_n^2 = 0.04 \Rightarrow \omega_n = 0.2, \zeta = 0.$$

I punti di rottura dei grafici sono, in ordine crescente:

$$\omega_n = 0.2, \frac{1}{\tau_1} = 1, \frac{1}{\tau_2} = 8$$

Essi dividono i grafici in quattro settori:

1° settore: $\omega \leq \omega_n$

L'unico contributo è quello di $k_b s$.

modulo: la pendenza è $+20$ dB/decade. Tuttavia, per posizionare correttamente l'asintoto, ci occorre anche l'intersezione con l'asse delle ascisse (0 dB). Abbiamo:

$$|k_b(i\omega)| = 1 \Leftrightarrow |k_b| \omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{|k_b|} = 1.6 \triangleq \omega^*$$

fase: dato che $k_b > 0$ e $h=1$, dalla tabella dei contributi asintotici otteniamo il valore $+\frac{\pi}{2}$.

2° settore: $\omega_n < \omega \leq \frac{1}{\tau_1}$

8

Si aggiunge il contributo di $1 + \frac{s^2}{\omega_n^2}$.

modulo: pendenza $+20 + 40 = +60$ dB/decade

contributo
di $k_b s$

contributo di $1 + \frac{s^2}{\omega_n^2}$

fase: $+\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$

contributo
di $k_b s$

contributo di $1 + \frac{s^2}{\omega_n^2}$

3° settore: $\frac{1}{\tau_1} < \omega \leq \frac{1}{\tau_2}$

Si aggiunge il contributo di $\frac{1}{1 + \tau_1 s}$

modulo: pendenza $+60 - 20 = +40$ dB/decade

contributo di
 $k_b s (1 + \frac{s^2}{\omega_n^2})$

contributo di $\frac{1}{1 + \tau_1 s}$

fase: $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$

contributo di
 $k_b s (1 + \frac{s^2}{\omega_n^2})$

contributo di $\frac{1}{1 + \tau_1 s}$ con $\tau_1 > 0$

4° settore: $\omega > \frac{1}{\tau_2}$

Si aggiunge il contributo di $\frac{1}{(1 + \tau_2 s)^2}$ → si "raddoppia" il contributo!

modulo: $+40 - 20 - 20 = 0$ dB/decade

2 volte il contributo di $\frac{1}{1 + \tau_2 s}$

fase: $-\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -2\pi$

2 volte il contributo di $\frac{1}{1 + \tau_2 s}$ con $\tau_2 > 0$.

Diagramma di Bode - Modulo

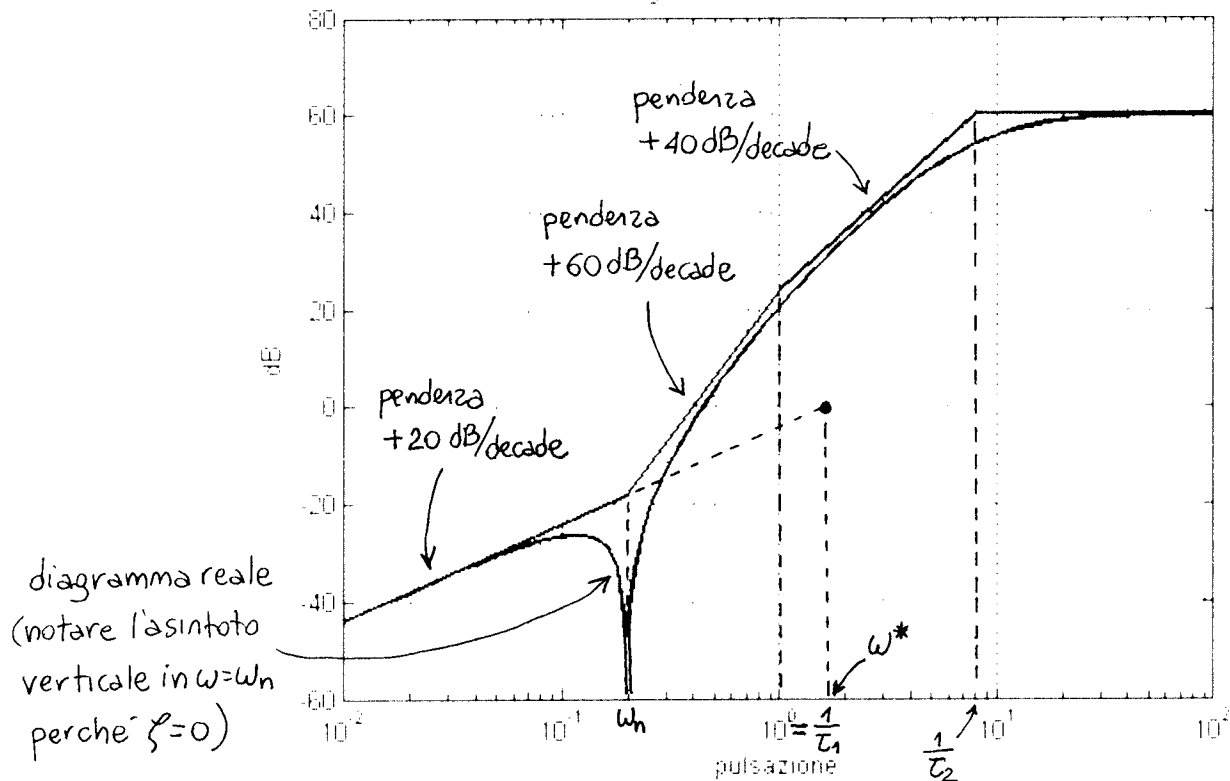


Diagramma di Bode - Fase

