MODELLI A TEMPO CONTINUO IN EQUAZIONI DI STATO

- Sistema lineare stazionario a tempo continuo in equazioni di stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

- Risposta completa (risposta libera e forzata)

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{x^l(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)}_{x^f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x_0}_{y^l(t)} + \underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau) + Du(t)}_{y^f(t)}$$

- Calcolo della risposta attraverso la trasformata di Laplace.

  – Evoluzione libera

$$x^l(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[sI - A]^{-1}x_0\}$$

$$y^l(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C[sI - A]^{-1}x_0\}$$

  – Evoluzione forzata

$$x^f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[sI - A]^{-1}BU(s)\}$$

$$y^f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)\}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

- Funzione di trasferimento $G(s)$: relazione tra la trasformata di Laplace dell'evoluzione forzata e quella dell'ingresso

$$G(s) = \frac{Y^f(s)}{U(s)} = C[sI - A]^{-1}B + D = C\frac{\mathrm{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}B + D$$

$G(s)$ è una *funzione razionale fratta* della variabile s.

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \ldots b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} \ldots a_1 s + a_0}$$

- La relazione $Y_f(s) = G(s)U(s)$ equivale nel dominio del tempo ad un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti tra l'ingresso $u(t)$ e la corrispondente risposta forzata (indicata nel seguito solo con $y(t)$)

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\ldots+b_0 u(t)$$

- Relazione fra la dimensione dello stato e l'ordine dell'equazione ingresso-uscita: l'ordine dell'equazione ingresso-uscita è uguale o inferiore alla dimensione dello stato. Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = [1\ 0] \qquad D = 0$$

$$\Downarrow$$

$$G(s) = C[\ sI - A\ ]^{-1}B\ +\ D = \tfrac{1}{s-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{y}(t) - y(t) = u(t)$$

- Relazione fra gli autovalori di A e i poli (zeri del denominatore) di $G(s)$: tutti i poli di $G(s)$ sono necessariamente anche autovalori di A, ma in generale non è vero il viceversa: possono infatti verificarsi cancellazioni tra numeratore e denominatore di $G(s)$.

MODELLI LINEARI A TEMPO CONTINUO INGRESSO USCITA

$$u(t),\ U(s) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema T.C.}\\ \text{lineare stazionario}\end{array}} \longrightarrow y(t),\ Y(s)$$

- Un sistema lineare stazionario a tempo continuo è descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti che lega l'ingresso $u(t)$ alla corrispondente uscita forzata $y(t)$

  $$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0y(t) = b_mu^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\ldots+b_0u(t)$$

- Funzione di trasferimento

  $$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + \ldots b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1}\ldots a_1s + a_0}$$

  La relazione $Y(s) = G(s)U(s)$, nel dominio del tempo, implica che la risposta $y(t)$ al segnale $u(t)$ è data dal prodotto di convoluzione

  $$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\ d\tau$$

  dove

  $$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

  rappresenta la risposta del sistema all'impulso unitario $\delta(t)$

- Funzione di trasferimento di un elemento di ritardo $y(t) = u(t-T)$: dal teorema del ritardo sulla trasformata di Laplace risulta

  $$G(s) = e^{-sT} \qquad (T > 0)$$

  Non razionale!

RAPPRESENTAZIONI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

- Funzione di trasferimento razionale fratta

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots a_1 s + a_0}$$

- Forma poli-zeri (si esplicitano le radici di numeratore e denominatore)

$$G(s) = K' \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

- Forma a costanti di tempo o di Bode (si isolano poli e zeri in $s = 0$ e si raccolgono a fattor comune a numeratore e a denominatore i termini costanti sia dei binomi relativi a radici reali sia dei trinomi relativi a coppie di radici complesse coniugate)

$$G(s) = \frac{K_B}{s^h} \frac{(1 + \tau'_1 s) \cdots (1 + \tau'_{zr} s)(1 + 2\zeta'_1 \frac{s}{\omega'_{n_1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n_1}}) \cdots (1 + 2\zeta'_{zc} \frac{s}{\omega'_{nzc}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{nzc}})}{(1 + \tau_1 s) \cdots (1 + \tau_{pr} s)(1 + 2\zeta_1 \frac{s}{\omega_{n_1}} + \frac{s^2}{\omega^2_{n_1}}) \cdots (1 + 2\zeta_{pc} \frac{s}{\omega_{npc}} + \frac{s^2}{\omega^2_{npc}})}$$

$K_B = K'\tau_1 \cdots \tau_{pr}\omega'^2_{n_1} \cdots \omega'^2_{n_{zc}}\tau'^{-1}_1 \cdots \tau'^{-1}_{zr}\omega^{-2}_{n_1} \cdots \omega^{-2}_{n_{pc}}$ guadagno di Bode

$\tau'_i = -\sigma'^{-1}_i$ zeri reali $z_i = \sigma'_i$

$\zeta'_i = -\sigma'_i[\sigma'^2_i + \omega'^2_i]^{-1/2}$; $\omega'_{n_i} = \sqrt{\sigma'^2_i + \omega'^2_i}$ zeri complessi $z_i = \sigma'_i \pm j\omega'_i$

$\tau_i = -\sigma^{-1}_i$ poli reali $p_i = \sigma_i$

$\zeta_i = -\sigma_i[\sigma^2_i + \omega^2_i]^{-1/2}$; $\omega_{n_i} = \sqrt{\sigma^2_i + \omega^2_i}$ poli complessi $p_i = \sigma_i \pm j\omega_i$

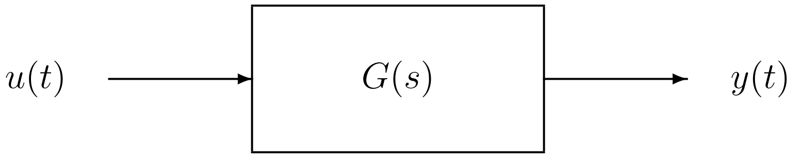
- Definizioni: se $0 < \zeta_i < 1$ (radici complesse coniugate a parte reale negativa), allora ζ_i si dice *fattore di smorzamento* e ω_{n_i} *pulsazione naturale* della coppia di poli (o zeri). $n - m$ è detto *grado relativo* di $G(s)$.

STABILITÀ

Il concetto di stabilità si introduce per caratterizzare la risposta di un sistema dinamico inizialmente in equilibrio all'azione di perturbazioni

- Stabilità alla Lyapunov dei punti di equilibrio di una rappresentazione di stato
  - Semplice
  - Asintotica
- Per i sistemi lineari stazionari in rappresentazione di stato
  - L'insieme dei punti di equilibrio è un sottospazio lineare (eventualmente la sola origine)
  - Tutti i punti di equilibrio hanno le stesse caratteristiche di stabilità, quindi la stabilità è una caratteristica del sistema
  - La stabilità semplice coincide con la limitatezza della risposta libera nello stato ad una qualunque condizione iniziale
  - La stabilità asintotica coincide con la limitatezza e convergenza a zero per $t \to \infty$ della risposta libera nello stato ad una qualunque condizione iniziale
  - Il sistema è stabile se e solo se tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale non positiva e quelli con parte reale nulla hanno un autospazio di dimensione pari alla molteplicità algebrica
  - Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale strettamente negativa

STABILITÀ INGRESSO LIMITATO - USCITA LIMITATA



- Definizione di *stabilità ILUL* (o *BIBO*) (ingresso limitato - uscita limitata)

Un sistema lineare stazionario si dice ILUL stabile rispetto all'ingresso $u(t)$ se ad ogni segnale in ingresso $u(t)$ limitato in ampiezza corrisponde una risposta $y(t)$ anch'essa limitata, ovvero

$$\begin{aligned} &\forall M_u > 0 \; \exists M_y > 0 \;\; : \\ &\forall u(\cdot) \;\; : \;\; |u(t)| \leq M_u \;\; \forall t \geq t_0 \;\; \Longrightarrow \;\; |y(t)| \leq M_y \;\; \forall t \geq t_0 \end{aligned}$$

STABILITÀ INGRESSO LIMITATO - USCITA LIMITATA

- **Criterio** di stabilità ILUL per sistemi lineari stazionari: *Un sistema lineare stazionario è ILUL stabile se e solo se la sua risposta impulsiva $g(t)$ è sommabile in valore assoluto, ovvero esiste finito $M > 0$ tale che*

$$\int_0^{\infty} |g(t)|dt \leq M$$

ovvero esiste finito $M > 0$ tale che

$$\int_0^{t} |g(\tau)|d\tau \leq M \qquad \forall t \geq 0 \qquad (*)$$

  – Dimostrazione parte sufficiente. Sia $|u(t)| \leq M_u$. Se vale $(*)$ allora per ogni t

$$|y(t)| = |\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau| \leq \int_0^t |g(t-\tau)||u(\tau)|d\tau \leq$$
$$\leq \int_0^t |g(t-\tau)|d\tau M_u \leq M M_u$$

  e quindi il sistema è ILUL stabile

  – Dimostrazione parte necessaria. Se il sistema è ILUL stabile, si supponga per assurdo che non valga $(*)$, ovvero si supponga che

$$\forall M > 0 \;\; \exists t_0 \geq 0 \quad : \quad \int_0^{t_0} |g(t)|dt > M$$

  si valuti allora $y(t_0)$ in corrispondenza dell'ingresso dato da

$$u(t) = \mathsf{sgn}[g(t_0 - t)]$$

  Si ha

$$|y(t_0)| = \int_0^{t_0} |g(t_0-\tau)|d\tau = \int_0^{t_0} |g(t)|dt > M$$

  e dunque

$$\forall M > 0 \;\; \exists t_0 \geq 0, \; u(t) \quad : \quad |y(t_0)| > M$$

  assurdo.

STABILITÀ INGRESSO LIMITATO - USCITA LIMITATA

- Criterio equivalente di stabilità ILUL per sistemi lineari stazionari, descritti da funzioni di trasferimento razionali fratte

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{B(s)}{A(s)}U(s)$$

  - Un sistema lineare stazionario è ILUL stabile se e solo se i poli della funzione di trasferimento $G(s)$ hanno parte reale strettamente minore di zero ovvero, equivalentemente, se e solo se la risposta impulsiva $g(t)$ tende a 0 per $t \to \infty$.

    Infatti, essendo $G(s)$ razionale fratta, i modi della risposta impulsiva $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ sono polinomiali, sinusoidali o esponenziali (generalizzati), quindi $g(t)$ converge a zero se e solo se è definitivamente maggiorata in valore assoluto da un'esponenziale decrescente, e pertanto la convergenza a zero di $g(t)$ è equivalente alla limitatezza dell'integrale di $|g(t)|$, ovvero la condizione di stabilità ILUL.

- Osservazioni

  - Il precedente criterio è evidentemente valido anche in presenza di un elemento di ritardo in $G(s)$, i.e., $G(s) = G'(s)e^{-sT}$, infatti il ritardo non influenza la limitatezza della risposta

  - Un sistema lineare stazionario avente una rappresentazione di stato asintoticamente stabile è anche ILUL stabile, poiché tutti i poli di $G(s)$ sono autovalori di A. In generale non è vero il viceversa (alcuni autovalori di A possono non comparire tra i poli di $G(s)$).

(Si veda anche Giua, cap. 9)

CRITERIO DI ROUTH

Lo studio della stabilità di un sistema lineare stazionario si riconduce sempre allo studio della posizione delle radici di un polinomio (il pol. caratteristico della matrice A nel caso della stabilità della rappresentazione di stato o il denominatore di $G(s)$ nel caso della stabilità ILUL) rispetto all'asse immaginario

- Polinomio di grado n

$$P_n(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots a_1 s + a_0$$

- Condizione necessaria affinché tutte le radici abbiano parte reale < 0:

$$a_i > 0 \text{ per ogni } i = 0, 1, \dots, n-1$$

  (necessaria e sufficiente nel caso $n = 2$, regola di Cartesio)

- Condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici abbiano parte reale < 0: criterio di Routh-Hurwitz.

  – Si costruisce la *tabella di Routh* come in figura

n	1	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	$\dots$	
$\dots$	$\dots$			

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-4} = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

  – **Criterio di Routh-Hurwitz.** Ad ogni variazione di segno che si presenta nella prima colonna della tabella corrisponde una radice di $P_n(s)$ con parte reale positiva e ad ogni permanenza una radice a parte reale negativa.

CRITERIO DI ROUTH: CASI SINGOLARI

Se ad un certo passo si ottiene una riga con uno zero nella prima colonna, non è possibile continuare la costruzione della tabella.

- Se gli altri elementi della riga non sono tutti nulli si può procedere in tre modi:

  1. Si sostituisce ϵ al posto dello 0 e si continua la tabella considerando alla fine il limite per ϵ tendente a zero dei coefficienti in prima colonna
  2. Si ripete l'algoritmo di Routh con il polinomio $(s+\lambda)P_n(s)$ con $\lambda > 0$ qualunque: il numero di radici con p.r. ≥ 0 chiaramente non cambia.
  3. Si studiano le radici di $P_n(1/s)$, le cui parti reali hanno lo stesso segno di quelle delle radici di $P_n(s)$.

- Se la costruzione della tabella dà luogo ad una riga di elementi tutti nulli, si procede come segue: si applica il criterio di Routh fino alla riga precedente quella nulla. L'analisi viene poi completata costruendo un polinomio ausiliario $P_a(s)$ definito dagli elementi della riga precedente quella nulla, e proseguendo la costruzione della tabella sostituendo alla riga nulla i coefficienti della derivata di $P_a(s)$. In tal caso, si dimostra che ogni variazione di segno nella nuova tabella corrisponde ad una radice a parte reale positiva e che ogni permanenza corrisponde ad una radice a parte reale nulla o negativa.

  Importante. Se si verifica una riga nulla, si dimostra che le radici di $P_a(s)$ sono anche radici di $P_n(s)$, e che queste radici sono a due a due opposte. Dunque in questo caso $P_n(s)$ non può avere tutte radici con parte reale strettamente negativa.

MODELLI A TEMPO DISCRETO IN EQUAZIONI DI STATO

- Sistema lineare stazionario a tempo discreto in equazioni di stato

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \\ \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

- Risposta completa nel dominio del tempo

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u_i$$

$$y_k = CA^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} B u_i + D u_k$$

- Calcolo della risposta attraverso la trasformata zeta.
  - Evoluzione libera

$$x_k^l = \mathcal{Z}^{-1}\{[zI - A]^{-1} z x_0\}$$

$$y_k^l = \mathcal{Z}^{-1}\{C[zI - A]^{-1} z x_0\}$$

  - Evoluzione forzata

$$x_k^f = \mathcal{Z}^{-1}\{[zI - A]^{-1} B U(z)\}$$

$$y_k^f = \mathcal{Z}^{-1}\{[C(zI - A)^{-1} B + D] U(z)\}$$

MODELLI A TEMPO DISCRETO IN EQUAZIONI DI STATO

- Funzione di trasferimento: relazione tra la trasformata zeta dell'evoluzione forzata e quella dell'ingresso

$$G(z) = \frac{Y^f(z)}{U(z)} = C[zI - A]^{-1}B + D = C\frac{\mathrm{adj}(zI - A)}{\det(zI - A)}B + D$$

- Relazione fra la dimensione del vettore di stato del sistema e l'ordine dell'equazione alle differenze ingresso-uscita: l'ordine dell'equazione ingresso-uscita è sempre uguale o inferiore alla dimensione dello stato

  Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = [1\ 0] \qquad D = 0$$

$$\Downarrow$$

$$G(z) = C[\ zI - A\ ]^{-1}B\ +\ D = \frac{1}{z-1}$$

$$\Downarrow$$

$$y_{k+1} - y_k = u_k$$

- Relazione fra gli autovalori di A e i poli di $G(z)$: tutti i poli di $G(z)$ sono necessariamente anche autovalori di A, ma in generale non è vero il viceversa: possono infatti verificarsi cancellazioni tra numeratore e denominatore di $G(z)$.

STABILITÀ DEI SISTEMI A TEMPO DISCRETO

- Modello ingresso-uscita.

$$u_k,\ U(z) \longrightarrow \boxed{G(z)} \longrightarrow y_k,\ Y(z)$$

  - Condizione di *stabilità per perturbazioni di durata limitata*: non esistono poli della funzione di trasferimento con modulo maggiore di uno e quelli con modulo unitario sono semplici.
  - Condizione di *stabilità ILUL*: tutti i poli della funzione di trasferimento hanno modulo strettamente minore di uno.

- Modello ingresso-stato-uscita.

$$\begin{cases} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{cases}$$

  - Condizione di *stabilità semplice*: non esistono autovalori della matrice A con modulo maggiore di uno e quelli con modulo unitario hanno la molteplicità algebrica uguale a quella geometrica.
  - Condizione di *stabilità asintotica*: tutti gli autovalori di A hanno modulo strettamente minore di uno.
  - Se il sistema è stabile asintoticamente, allora è anche ILUL stabile.

CRITERI DI STABILITÀ PER SISTEMI A TEMPO DISCRETO

- Analisi della stabilità a tempo discreto di un polinomio

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0$$

- Criterio di Jury (equivalente del criterio di Routh nel caso a tempo discreto)

  – Tabella di Jury

$$\begin{array}{c|llllll}
1 & 1 & a_{n-1} & \ldots & \ldots & a_1 & a_0 \\
2 & a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_{n-1} & 1 \\
3 & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_1 & b_0 & 0 \\
4 & b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

$$b_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & a_0 \\ a_0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad b_{n-2} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ a_0 & a_{n-1} \end{vmatrix}, \qquad \ldots$$

Criterio di Jury. Il polinomio $P_n(z)$ ha tutte radici con modulo strettamente minore di uno se e solo se i primi elementi delle righe di indice dispari della tabella sono tutti diversi da zero ed hanno segno positivo