APPUNTI SU TRASFORMATE DI LAPLACE E TRASFORMATE Z

ERRATA CORRIGE

- Proprietà 2.1: $\mathcal{L}[y(t)]$
- (2.29): $u(0^+)$
- (2.65): $\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}$
- Prima della (2.69): $A_0 = \lim_{s\to\infty} W(s)$
- Nella Sezione 2.6, usa sia t che k per indicare il tempo discreto
- (2.146): $\mathcal{Z}[u(t+1)]$
- Proprietà 2.14: Sostituire “Traslazione nel dominio di z” con “Cambio di scala nel dominio di z”
- Dimostrazione della (2.160): “Si ottiene facilmente a partire dalla trasformata di a^t, ...”
- Titolo della Sezione 2.6.4: “...: calcolo delle potenze di una matrice e ...”
- (2.189): $w(t) = \sum_{j=1}^{q_1} A_{1,j}\,\delta(t-j+1) + \sum_{i=2}^{r}\sum_{j=1}^{q_i} A_{i,j}\,p_i^{t-j+1}\binom{t}{j-1}$

2.3 La trasformata di Laplace

Lo studio dei sistemi lineari stazionari a tempo continuo, ed in particolare lo studio dei legami ingresso-uscita di tali sistemi, è di solito condotto facendo uso delle strumento formale-simbolico della *trasformata di Laplace*.

In queste note la trasformata di Laplace viene presentata in modo estremamente sintetico ed operativo. Per tutti gli aspetti formali, di esistenza della trasformata, e per i legami con altre trasformate ed integrali, ad esempio con la trasformata di Fourier, si rimanda a testi specifici.

Si consideri una funzione del tempo $f(\cdot)$, a valori complessi, nulla per $t < 0$, e maggiorata da $M\mathrm{e}^{\gamma t}$, per qualche valore di $M > 0$ e $\gamma > 0$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = 0$, $t < 0$, $f(t) < M\mathrm{e}^{\gamma t}$, $t > 0$.

La trasformata di Laplace della funzione $f(\cdot)$, indicata (sia pure impropriamente) con la notazione:

$$F(s) := \mathcal{L}[f(t)], \tag{2.23}$$

è definita dall'integrale[1] (supposto che esista):

$$F(s) := \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}dt. \tag{2.24}$$

Se l'integrale (2.24) esiste per un certo valore complesso $s_0 = \sigma_0 + \jmath\omega_0$, allora esiste per tutti i valori s tali che $Re(s) \geq \sigma_0$. Infine, il più piccolo valore di σ_0 tale che, per ogni s con $Re(s) > \sigma_0$ l'integrale (2.24) converge, è detto *ascissa di convergenza*, e sarà indicato con α; la regione del piano complesso $\mathcal{E} := s \in \mathbb{C} : Re(s) > \alpha$ è detta *regione di esistenza*. La funzione $F(s)$ ha lo stesso contenuto informativo del segnale di origine $f(t)$; più precisamente, $F(s)$ ed $f(t)$ sono due diverse rappresentazioni dello stesso segnale: $F(s)$ è la rappresentazione nel dominio del tempo, mentre $f(t)$ è la rappresentazione dello stesso segnale nel dominio del tempo.

Nota la trasformata di Laplace $F(s)$ di un segnale, la sua rappresentazione nel dominio del tempo, $f(t)$, può essere ricostruita a partire dalla *trasformata inversa di Laplace* o *antitrasformata di Laplace*, definita dall'integrale di linea:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi\jmath}\int_{\sigma-\jmath\infty}^{\sigma+\jmath\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}ds, \quad t \geq 0 \tag{2.25}$$

cioè:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + \jmath\omega)\mathrm{e}^{(\sigma+\jmath\omega)t}d\omega, \quad t \geq 0 \tag{2.26}$$

ove σ è un qualunque numero reale maggiore dell'ascissa di convergenza α. Si noti che l'integrale è calcolato lungo una retta del piano complesso parallela all'asse immaginario. Di norma, tale integrale si calcola tramite il teorema dei residui, considerando il percorso chiuso costituito dalla retta verticale $s = \sigma + \jmath\omega$ e da un arco di cerchio antiorario di raggio infinito.

La trasformata di Laplace ha interesse perchè le due trasformazioni (2.24) e (2.25) rappresentano una relazione biunivoca tra funzioni del tempo e corrispondenti trasformate, nel senso meglio precisato dalla seguente proprietà di unicità.

2.3.1 Proprietà della trasformata di Laplace

Le seguenti proprietà della trasformata di Laplace sono di fondamentale importanza.

Proprietà 2.1 (Proprietà di unicità) *Se $\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}L[y(t)]$ lungo una qualche linea $s = \sigma + \jmath\omega$, con $\sigma > \max\{\alpha_x, \alpha_y\}$, allora le due funzioni del tempo coincidono, cioè $x(t) = y(t)$, $t \geq 0$ (quasi ovunque).*

Proprietà 2.2 (Linearità) *Siano $u(t)$ e $y(t)$ due funzioni del tempo, con trasformata $U(s)$ ed $Y(s)$, rispettivamente. Allora, vale la seguente proprietà di linearità:*

$$\mathcal{L}[c_1u(t) + c_2y(t)] = c_1U(s) + c_2Y(s), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.27}$$

□

[1] Più rigorosamente, la trasformata di Laplace è definita dal seguente integrale

$$F(s) := \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{-\epsilon}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}dt.$$

Proprietà 2.3 (Ritardo finito) *Siano $u(t)$ ed $U(s)$ un segnale del tempo e la sua trasformata, con ascissa di convergenza α_u . Allora, dato un reale $T > 0$, la funzione traslata nel tempo $u(t-T)$ ha trasformata ed ascissa di convergenza pari a:*

$$\mathcal{L}[u(t-T)] = \mathrm{e}^{-sT}U(s), \quad \alpha = \alpha_u. \tag{2.28}$$

Dimostrazione.

$$\mathcal{L}[u(t-T)] = \int_0^\infty u(t-T)\mathrm{e}^{-st}dt = \int_{-T}^\infty u(\tau)\mathrm{e}^{-s(\tau+T)}d\tau = \mathrm{e}^{-sT}\int_0^\infty u(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}d\tau = \mathrm{e}^{-sT}U(s), \quad Re(s) > \alpha_u.$$

□

Proprietà 2.4 (Trasformata di una derivata) *Siano $u(t)$ ed $U(s)$ un segnale del tempo e la sua trasformata. Allora, la derivata temporale $\dot{u}(t)$ della funzione $u(t)$ ha trasformata pari a:*

$$\mathcal{L}\left[\frac{u(t)}{dt}\right] = sU(s) - u(0^-). \tag{2.29}$$

Dimostrazione. *Integrando per parti si trova:*

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}u(t)\right] = \int_0^\infty \frac{d}{dt}u(t)\mathrm{e}^{-st}dt = \left[u(t)\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty u(t)\mathrm{e}^{-st}dt = -u(0) + sU(s).$$

□

Proprietà 2.5 (Trasformata di una derivata seconda) *Siano $u(t)$ ed $U(s)$ un segnale del tempo e la sua trasformata. Allora, la derivata temporale seconda $\frac{d^2}{dt^2}u(t)$ della funzione $u(t)$ ha trasformata pari a:*

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}u(t)\right] = s^2U(s) - su(0) - \frac{d}{dt}u(t)|_{t=0}. \tag{2.30}$$

Proprietà 2.6 (Trasformata di un integrale) *Siano $u(t)$ ed $U(s)$ un segnale del tempo e la sua trasformata. Allora, l'integrale $\int_0^t u(\tau)d\tau$ ha trasformata pari a:*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t u(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}U(s). \tag{2.31}$$

Dimostrazione. *Integrando per parti si trova:*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t u(\tau)d\tau\right] = \int_0^\infty \left(\int_0^t u(\tau)d\tau\right)\mathrm{e}^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}\int_0^t u(\tau)d\tau\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty u(t)\mathrm{e}^{-st}dt = \frac{1}{s}U(s).$$

□

Proprietà 2.7 (Traslazione nel dominio di s (traslazione complessa)) *Siano $u(t)$ ed $U(s)$ un segnale del tempo e la sua trasformata. Allora, la funzione $\mathrm{e}^{at}u(t)$ ha trasformata pari a:*

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}u(t)] = U(s-a). \tag{2.32}$$

□

Proprietà 2.8 (Trasformata di un integrale di convoluzione) *Siano $u(t)$ ed $y(t)$ due funzioni del tempo, $U(s)$ ed $Y(s)$ le loro trasformate. Allora, l'integrale di convoluzione delle due funzioni del tempo, se esiste, ha trasformata pari a:*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t u(t-\tau)y(\tau)d\tau\right] = U(s)Y(s). \tag{2.33}$$

□

Proprietà 2.9 (Antitrasformata della derivata rispetto ad s) *Siano $u(t)$ ed $U(s)$ un segnale del tempo e la sua trasformata. Allora, la funzione $\frac{d}{ds}U(s)$ ha antitrasformata pari a:*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}U(s)\right] = -tu(t). \tag{2.34}$$

□

2.3.2 Trasformata di Laplace di segnali notevoli

Si danno ora le trasformate di alcuni segnali elementari, di interesse nello studio di sistemi dinamici.

Gradino unitario. Sia $\delta_{-1}(t)$ la funzione gradino unitario:

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}, \tag{2.35}$$

la sua trasformata di Laplace e la corrispondente ascissa di convergenza α sono date da:

$$\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s}, \quad \alpha = 0. \tag{2.36}$$

Dimostrazione

$$\mathcal{L}\left[\delta_{-1}(t)\right] = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s}\left(\lim_{t\to\infty} e^{-st} - \lim_{t\to 0} e^{-st}\right) = \frac{1}{s}, \quad Re(s) > 0.$$

□

Rampa unitaria. Sia $\delta_{-2}(t)$ una rampa con pendenza unitaria:

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}, \tag{2.37}$$

la sua trasformata di Laplace e la corrispondente ascissa di convergenza sono:

$$\mathcal{L}\left[\delta_{-2}(t)\right] = \frac{1}{s^2}, \quad \alpha = 0. \tag{2.38}$$

Dimostrazione. Si ottiene facilmente a partire dalla trasformata di un gradino, applicando la proprietà (2.6) di trasformazione di un integrale. Si noti che $\delta_{-2}(t) = t\delta_{-1}(t)$. Si noti inoltre che per il calcolo della trasformata (2.38) si potrebbe applicare anche la proprietà 2.9, riscritta come:

$$\mathcal{L}\left[tu(t)\right] = -\frac{d}{ds}U(s). \tag{2.39}$$

□

Segnale esponenziale. Sia $u(t)$ un segnale esponenziale con costante a positiva:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{at} & t \geq 0 \end{cases}, \tag{2.40}$$

la sua trasformata di Laplace ed ascissa di convergenza sono:

$$\mathcal{L}[e^{at}\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s-a}, \quad \alpha = a. \tag{2.41}$$

Dimostrazione. Innanzitutto, si noti che la funzione $u(t)$ definita sopra coincide con la funzione $e^{at}\delta_{-1}(t)$. Data una generica funzione del tempo $f(t)$, la notazione $f(t)\delta_{-1}(t)$ è usata per indicare il fatto che la funzione in esame è nulla per tempi negativi.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{at}\delta_{-1}(t)\right] &= \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_0^\infty = \\ &= -\frac{1}{s-a}\left(\lim_{t\to\infty} e^{-(s-a)t} - \lim_{t\to 0} e^{-(s-a)t}\right) = \frac{1}{s-a}, \quad Re(s) > a.\end{aligned}$$

□

A scopo esemplificativo, la tabella 2.1 raccoglie le trasformate dirette ed inverse di alcune funzioni di uso comune. Di norma, tali trasformate si ottengono facilmente a partire da quelle riportate sopra, tramite le proprietà descritte in precedenza.

2.3.3 Alcuni teoremi

Nello studio dei sistemi dinamici sono utili alcuni teoremi sui legami tra i valori limite di un segnale del tempo e della corrispondente trasformata di Laplace.

Teorema 2.1 (Valore finale) *Sia $u(t)$ una funzione del tempo, con trasformata $U(s)$. Allora, il limite per t che tende ad infinito di tale funzione, se esiste ed è finito, è dato da:*

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{s\to 0^+} sU(s). \tag{2.42}$$

Si noti che il teorema è applicabile solo se il punto $s = 0$ è interno alla regione di convergenza, cioè solo se l'ascissa di convergenza è nel semipiano complesso sinistro. In effetti, l'esistenza del limite di interesse, cioè $\lim_{t\to\infty} u(t)$, garantisce tale posizione dell'ascissa di convergenza.

Il teorema del valore finale è utile nel calcolo del guadagno a regime di una funzione di trasferimento.

Teorema 2.2 (Valore iniziale) *Sia $u(t)$ una funzione del tempo, con trasformata $U(s)$. Allora il valore iniziale per t che tende a zero da destra di tale funzione, se esiste ed è finito, è dato da:*

$$\lim_{t\to 0^+} u(t) = \lim_{s\to\infty} sU(s). \tag{2.43}$$

Teorema 2.3 (Valore dell'integrale) *Sia $u(t)$ una funzione del tempo, con trasformata $U(s)$. Allora, se l'integrale $\int_0^\infty u(t)dt$ esiste, il suo valore è dato da:*

$$\int_0^\infty u(t)dt = \lim_{s\to 0} U(s). \tag{2.44}$$

2.3.4 Sistemi a tempo continuo: calcolo dell'esponenziale di matrice e della matrice di trasferimento

Si consideri il sistema dinamico:

$$\dot{x} = Fx, \quad x(0) = x_0. \tag{2.45}$$

È noto che la soluzione di tale equazione differenziale omogenea, cioè la risposta libera nello stato, è descritta dall'esponenziale di matrice:

$$x(t) = \mathrm{e}^{Ft}x_0, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.46}$$

Per il calcolo dell'esponenziale di matrice e^{Ft} si può far uso alla trasformata di Laplace. Infatti, per la proprietà della trasformata di una funzione derivata, il sistema precedente, nel dominio di Laplace, può essere scritto come:

$$sX(s) - x(0) = FX(s), \tag{2.47}$$

da cui segue facilmente:

$$(sI - F)X(s) = x(0). \tag{2.48}$$

Nel campo delle funzioni razionali (e non, si badi bene, nel campo dei reali o dei complessi), la matrice $(sI - F)$ è non singolare, infatti il suo determinante è il polinomio caratteristico del sistema, per cui l'equazione precedente può essere risolta rispetto alla trasformata dello stato, trovando:

$$X(s) = (sI - F)^{-1}x(0), \tag{2.49}$$

da cui, antitrasformando, segue:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - F)^{-1}\right] x(0), \tag{2.50}$$

e quindi, dal confronto con (2.46), segue:

$$\mathrm{e}^{Ft} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - F)^{-1}\right]. \tag{2.51}$$

Per quanto riguarda invece l'analisi di un sistema lineare a tempo continuo, il metodo della trasformata di Laplace consente di determinare in modo semplice il legame ingresso-uscita, e cioè la matrice di trasferimento, di tale sistema. Si consideri allora il sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Fx + Gu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, && (2.52)\\ y &= Hx + Du, \quad y \in \mathbb{R}^p. && (2.53) \end{aligned}$$

Nel dominio di Laplace il sistema è quindi descritto da:

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= FX(s) + GU(s) & (2.54)\\ Y(s) &= HX(s) + DU(s), & (2.55) \end{aligned}$$

e quindi, tenendo conto della non-singolarità della matrice $(sI - F)$ nel campo delle funzioni razionali, si trova:

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - F)^{-1}GU(s) + (sI - F)^{-1}x(0), & (2.56a)\\ Y(s) &= H(sI - F)^{-1}GU(s) + DU(s) + H(sI - F)^{-1}x(0). & (2.56b) \end{aligned}$$

Le due equazioni (2.56) descrivono completamente il sistema. La (2.56a) descrive il legame tra la coppia stato iniziale ingresso e lo stato, mentre la seconda descrive il legame tra le stesse grandezze e la funzione di uscita.

I termini delle (2.56) che descrivono l'effetto delle condizioni iniziali sullo stato e sull'uscita sono dette risposte libere, nello stato e nell'uscita, rispettivamente:

$$X_\ell(s) = (sI - F)^{-1}x(0), \tag{2.57}$$

$$Y_\ell(s) = H(sI - F)^{-1}x(0) \tag{2.58}$$

mentre i termini che descrivono l'effetto del segnale (vettoriale) di ingresso sullo stato e sull'uscita sono dette risposte forzate, nello stato e nell'uscita, rispettivamente:

$$X_f(s) = (sI - F)^{-1}GU(s), \tag{2.59}$$

$$Y_f(s) = H(sI - F)^{-1}GU(s) + DU(s). \tag{2.60}$$

Infine, la matrice di funzioni razionali

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}G + D, \tag{2.61}$$

che descrive completamente il legame tra il segnale di ingresso e quello di uscita (nel caso di condizioni iniziali nulle), è detta *matrice di trasferimento* del sistema. Nel caso in cui sia il segnale di ingresso che quello di uscita siano scalari, e cioè nel caso $m = 1$ e $p = 1$, si parla di *funzione di trasferimento*.

2.3.5 Antitrasformata di funzioni razionali proprie

Il legame ingresso-uscita di un sistema lineare stazionario a tempo continuo è rappresentabile con una matrice di funzioni razionali proprie nella variabile s. Tenendo conto della forma della trasformata di segnali esponenziali e polinomiali, anche l'uscita di un sistema lineare, in risposta a segnali di questo tipo, è descritta, nel dominio di s, da una funzione razionale. È quindi di notevole importanza vedere come antitrasformare una funzione razionale.

Si consideri allora la seguente funzione $Y(s)$, propria e con denominatore monico:

$$Y(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}, \tag{2.62}$$

e si assuma, per semplicità, che le radici del denominatore siano tutte distinte (e complesse coniugate a coppia, se non reali), cioè:

$$s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 = \prod_{i=1}^{n}(s - p_i), \quad p_i \neq p_j,\, i \neq j. \tag{2.63}$$

Per ben noti risultati sulle funzioni razionali, la funzione $Y(s)$ può essere scomposta in *frazioni parziali*:

$$Y(s) = A_0 + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - p_n}, \tag{2.64}$$

con $A_0 = \lim_{s\to\infty} Y(s)$ ed inoltre $A_i = \lim_{s\to p_i}(s - p_i)Y(s)$, per il teorema dei residui. Il calcolo dei residui A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ puù essere verificato in modo immediato. Infatti dalla (2.63) si ha, per il generico residuo A_i:

$$(s - p_i)Y(s) = (s - p_i)A_0 + (s - p_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \div i}}^{n} \frac{A_j}{s - p_j} + A_i \tag{2.65}$$

A partire dalla scomposizione in frazioni parziali (2.64), tenendo conto della proprietà di linearità (2.8) e della trasformata di segnali elementari, si vede immediatamente che il segnale $y(t)$ è dato da:

$$y(t) = A_0\delta(t) + A_1 \mathrm{e}^{\,p_1 t} + A_2 \mathrm{e}^{\,p_2 t} + \cdots + A_n \mathrm{e}^{\,p_n t}. \tag{2.66}$$

Per inciso, l'equazione (2.66) consente di studiare in modo immediato la *risposta permanente* di un sistema lineare a tempo continuo.

Nel caso in cui alcuni degli zeri del denominatore della funzione razionale da anti-trasformare, (cioè alcuni *poli* della funzione), abbiano molteplicità maggiore di uno, il procedimento è analogo, salvo la forma della espansione in frazioni parziali.

Sia allora $W(s)$ una generica funzione razionale propria,

$$W(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}. \tag{2.67}$$

$W(s)$ può essere espansa in frazioni parziali nella forma:

$$W(s) = A_0 + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{q_i} \frac{A_{i,j}}{(s-p_i)^j}, \tag{2.68}$$

dove r indica il numero di zeri distinti del denominatore della $W(s)$, q_i indica la molteplicità di p_i come zero di tale denominatore, A_0 indica il legame diretto, cioè $A_0 = \lim_{t\to\infty} W(s)$, ed il generico residuo $A_{i,j}$ è calcolato come:

$$A_{i,j} = \lim_{s\to p_i} \left\{ \frac{1}{(q_i - j)!} \frac{d^{q_i-j}}{ds^{q_i-j}} \left[(s-p_i)^{q_i} W(s) \right] \right\}. \tag{2.69}$$

In tal caso, tenendo conto delle varie proprietà della trasformata di Laplace, si ha:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[W(s)\right] = A_0\delta(t) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{q_i} A_{i,j} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \mathrm{e}^{\,p_i t}. \tag{2.70}$$

Funzione del tempo	Trasformata di Laplace
$\delta(t)$ (impulso di Dirac)	1
$\delta_{-1}(t)$ (gradino unitario)	$\frac{1}{s}$
$\delta_{-2}(t) = t\delta_{-1}(t)$ (rampa unitaria)	$\frac{1}{s^2}$
$\delta_{-1}(t-a)$ (gradino unitario con inizio in $t = a$)	$\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-as}$
e^{at} (esponenziale)	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{at}$ (esponenziale polinomiale)	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$\sin(\omega t)$ (sinusoide)	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$ (cosinusoide)	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t)$	$\frac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ (fattore trinomio)
$\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\dot{x}(t)$	s X(s) - x(0)
$\int_0^t x(\tau)d\tau$	$s^{-1}X(s)$
$x(t-T), T > 0$	$\mathrm{e}^{-sT}X(s)$
$\mathrm{e}^{at}x(t)$	$X(s-a)$
$\int_0^t x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau$	$X_1(s)X_2(s)$
$tx(t)$	$-\frac{d}{ds}X(s)$ (derivata nel dominio di s)

Tabella 2.1: Trasformate ed antitrasformate di Laplace di uso comune

2.6 La trasformata Z

Lo studio dei sistemi lineari stazionari a tempo discreto, ed in particolare lo studio dei legami ingresso-uscita di tali sistemi, è di solito condotto facendo uso delle strumento formale-simbolico della *trasformata Z*.

In queste note la trasformata Z viene presentata in modo estremamente sintetico ed operativo. Per tutti gli aspetti formali e di esistenza della trasformata si rimanda a testi specifici.

Si consideri una sequenza $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$, $\{f(t) = f_t, t = 0, 1, 2, \ldots\}$. La trasformata Z è un operatore dallo spazio di tali sequenze allo spazio di funzioni di variabile complessa, ed associa ad ogni sequenza $f(\cdot)$ una funzione, indicata (impropriamente) con $F(z) = \mathcal{Z}[f(t)]$, e definita dalla serie:

$$F(z) := \sum_{t=0}^{\infty} f(t) z^{-t}, \tag{2.137}$$

ammesso che tale serie converga. Tenendo conto del fatto che $F(z)$ è definita a partire da una serie in z^{-1}, la convergenza sarà ottenuta all'esterno di un cerchio centrato nell'origine del piano complesso e di raggio R sufficientemente grande. Il valore di tale raggio è detto *raggio di convergenza* della trasformata $U(z)$, e dipende dalla specifica sequenza considerata. La regione del piano complesso esterna al cerchio di raggio R centrato nell'origine è detta *regione di convergenza* o *dominio di convergenza*.

Ad esempio, si consideri la funzione (a tempo discreto) impulso unitario, definito da:

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \tag{2.138}$$

La trasformata Z di $u(k) = \delta(t)$ è data da:

$$U(z) = \mathcal{Z}[u(t)] = 1, \tag{2.139}$$

infatti, dalla definizione, segue immediatamente:

$$U(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \cdots = u(0) = 1. \tag{2.140}$$

Da quanto precede, segue facilmente che il raggio di convergenza è $R = 0$.

Nota la trasformata Z di una sequenza, sia essa $X(z)$, la sua rappresentazione nel dominio del tempo può essere ottenuta tramite la anti-trasformata Z, o trasformata inversa, definita dal seguente *integrale di inversione*:

$$x(t) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi\jmath} \int_{\Gamma} z^{t-1} X(z) dz, \quad \forall t \in \mathbb{Z}^+, \tag{2.141}$$

dove l'integrale di linea è calcolato lungo una circonferenza Γ interna alla regione di convergenza e con centro nell'origine del piano z.

L'uso della trasformata Z, analogamente a quanto visto per la trasformata di Laplace, è reso particolarmente agevole da alcune proprietà fondamentali, che consentono di ricavare la trasformata della maggior parte dei segnali di interesse a partire da quella di pochi segnali notevoli (si veda le seguente tabella 2.3).

2.6.1 Proprietà della trasformata Zeta

Le seguenti proprietà della trasformata Zeta sono di fondamentale importanza.

Proprietà 2.10 (Proprietà di unicità) *Data una funzione olomorfa $U(z)$, definita nella regione di piano complesso esterna ad un cerchio di raggio ρ, esiste ed è unica una funzione $x(t)$, $t \in \mathbb{Z}^+$, che soddisfa la condizione:*

$$U(z) = \mathcal{Z}[x(t)], \tag{2.142}$$

e che può essere calcolata per mezzo dell'integrale (2.141)*, con Γ cerchio di raggio maggiore di ρ.*

Proprietà 2.11 (Linearità) *Siano $u(t)$ e $y(t)$, $t \in \mathbb{Z}^+$, due sequenze temporali, con trasformata Zeta $U(z)$ ed $Y(z)$, rispettivamente. Allora, vale la seguente proprietà di linearità:*

$$\mathcal{Z}[c_1 u(t) + c_2 y(t)] = c_1 U(z) + c_2 Y(z), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.143}$$

□

Proprietà 2.12 (Ritardo (Scorrimento a destra)) *Siano $u(t)$ ed $U(z)$ una sequenza temporale e la sua trasformata. Allora, dato un intero $h > 0$, la funzione traslata nel tempo $u(t-h)$ ha trasformata:*

$$\mathcal{Z}[u(t-h)] = z^{-h}U(z). \tag{2.144}$$

Dimostrazione.

$$\mathcal{Z}[u(t-h)] = \sum_{t=0}^{\infty} u(t-h)z^{-t} = \sum_{k=-h}^{\infty} u(k)z^{-(k+h)} = z^{-h}\sum_{k=-h}^{\infty} u(k)z^{-k} = z^{-h}\sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k} = z^{-h}U(z).$$

□

Proprietà 2.13 (Anticipo (Scorrimento a sinistra)) *Siano $u(t)$ ed $U(z)$ una sequenza temporale e la sua trasformata. Allora, dato un intero $h > 0$, la funzione traslata nel tempo a sinistra (anticipata) $u(t+h)$ ha trasformata:*

$$\mathcal{Z}[u(t+h)] = z^h\left[U(z) - \sum_{t=0}^{h-1} u(t)z^{-t}\right]. \tag{2.145}$$

Nel caso particolarmente importante in cui lo scorrimento è di un solo passo, si ha:

$$\mathcal{Z}[x(t+1)] = zU(z) - zu(0). \tag{2.146}$$

Dimostrazione. La trasformata di interesse è data da:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[x(t+h)\right] &= \sum_{t=0}^{\infty} x(t+h)z^{-t} = \sum_{k=h}^{\infty} x(k)z^{-(k-h)} = z^h\sum_{k=h}^{\infty} x(k)z^{-k} \\
&= z^h\sum_{k=h}^{\infty} x(k)z^{-k} \pm z^h\sum_{k=0}^{h-1} x(k)z^{-k} = z^h\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - z^h\sum_{k=0}^{h-1} x(k)z^{-k} = z^hX(z) - z^h\sum_{k=0}^{h-1} x(k)z^{-k}
\end{aligned}$$

□

Proprietà 2.14 (Traslazione nel dominio di z (traslazione complessa)) *Siano $u(t)$, $t \in \mathbb{Z}^+$, ed $U(z)$ un segnale del tempo e la sua trasformata. Allora, la funzione $a^t u(t)$ ha trasformata pari a:*

$$\mathcal{Z}[a^t u(t)] = U(\frac{z}{a}). \tag{2.147}$$

□

Proprietà 2.15 (Convoluzione) *Siano $u(t)$ ed $y(t)$ due sequenze del tempo, $t \in \mathbb{Z}^+$, $U(z)$ ed $Y(z)$ le loro trasformate. Allora, la convoluzione delle due sequenze, definita da:*

$$u(t) * y(t) := \sum_{\tau=0}^{t} u(t-\tau)y(\tau) = \sum_{\tau=0}^{t} u(\tau)y(t-\tau) \tag{2.148}$$

ha trasformata pari a:

$$\mathcal{Z}\left[u(t) * y(t)\right] = U(z)Y(z). \tag{2.149}$$

□

Proprietà 2.16 (Differenziazione rispetto a z) *Siano $u(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, ed $U(z)$ un segnale del tempo e la sua trasformata. Allora, la funzione $tu(t)$ ha trasformata Zeta pari a:*

$$\mathcal{Z}\left[tu(t)\right] = -z\frac{d}{dz}U(z). \tag{2.150}$$

□

2.6.2 Trasformata Zeta di segnali notevoli

Si danno ora le trasformate di alcuni segnali elementari, di interesse nello studio di sistemi dinamici.

Gradino unitario. Sia $\delta_{-1}(t)$, $t \in \mathbb{Z}$ la funzione gradino unitario:

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{Z}, t < 0 \\ 1 & t \in \mathbb{Z}, t \geq 0 \end{cases}, \tag{2.151}$$

la sua trasformata Zeta è data da:

$$\mathcal{Z}[\delta_{-1}(t)] = \frac{z}{(z-1)}. \tag{2.152}$$

Dimostrazione. In questo caso la serie formale che definisce la trasformata Zeta diviene:

$$\sum_{t=0}^{\infty} u(t) z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} z^{-t}, \tag{2.153}$$

e tale serie converge, per tutti i valori z con $|z| > 1$, ed ha come somma:

$$\frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}. \tag{2.154}$$

□

Rampa unitaria. Sia $\delta_{-2}(t)$ una rampa con pendenza unitaria:

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{Z}, t < 0 \\ t & t \in \mathbb{Z}, t \geq 0 \end{cases}, \tag{2.155}$$

la sua trasformata Zeta è data da:

$$\mathcal{Z}\left[\delta_{-2}(t)\right] = \frac{z}{(z-1)^2}. \tag{2.156}$$

Dimostrazione. Si ottiene facilmente a partire dalla trasformata di un gradino, applicando la proprietà (2.16) di differenziazione rispetto a z. □

Segnale esponenziale. Sia $u(t)$ un segnale esponenziale (a tempo discreto) con costante a:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{Z}, t < 0 \\ a^t & t \in \mathbb{Z}, t \geq 0 \end{cases}, \tag{2.157}$$

la sua trasformata Zeta è data da:

$$\mathcal{Z}[a^t \delta_{-1}(t)] = \frac{z}{z-a}. \tag{2.158}$$

Dimostrazione. Il risultato si può dimostrare a partire dalla trasformata di un gradino, tenendo conto della proprietà 2.14 di traslazione nel dominio di z. □

Segnale esponenziale-rampa. Sia $u(t)$ il prodotto di un esponenziale per una rampa:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{Z}, t < 0 \\ ta^t & t \in \mathbb{Z}, t \geq 0 \end{cases}, \tag{2.159}$$

la sua trasformata Zeta è data da:

$$\mathcal{Z}[ta^t] = \frac{az}{(z-a)^2}. \tag{2.160}$$

Dimostrazione. Si ottiene facilmente a partire dalla trasformata di un gradino, applicando la proprietà (2.16) di differenziazione rispetto a z. □

A scopo esemplificativo, la tabella 2.3 raccoglie le trasformate dirette ed inverse di alcune funzioni di uso comune. Di norma, tali trasformate si ottengono facilmente a partire da quelle riportate sopra, tramite le proprietà descritte in precedenza.

2.6.3 Alcuni teoremi

Nello studio dei sistemi dinamici sono utili alcuni teoremi sui legami tra i valori limite di un segnale del tempo e della corrispondente trasformata Zeta.

Teorema 2.4 (Valore finale) *Sia $u(t)$, $t \in \mathbb{Z}^+$, una funzione del tempo, con trasformata $U(z)$. Allora, il limite per t che tende ad infinito di tale funzione, se esiste ed è finito, è dato da:*

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{z\to 1^+} \frac{z-1}{z} U(z). \tag{2.161}$$

Si noti che il teorema è applicabile solo se il raggio di convergenza è minore di uno, cioè solo se il cerchio unitario è tutto interno alla regione di convergenza.

Teorema 2.5 (Valore iniziale) *Sia $u(t)$, $t \in \mathbb{Z}^+$, una funzione del tempo, con trasformata $U(z)$. Allora il valore iniziale della sequenza, $u(0)$, è dato da:*

$$u(0) = \lim_{|z|\to\infty} U(z). \tag{2.162}$$

$$\tag{2.163}$$

2.6.4 Sistemi a tempo discreto: calcolo dell'esponenziale di matrice e della matrice di trasferimento

Si consideri il sistema dinamico:

$$x(t+1) = Fx(t), \quad x(0) = x_0,\ t \in \mathbb{Z}^+ \tag{2.164}$$

È noto che la soluzione di tale equazione omogenea alle differenze finite, cioè la risposta nello stato del sistema alla data condizione iniziale, la *risposta libera nello stato*, è descritta dall'esponenziale di matrice (a tempo discreto):

$$x(t) = F^t x_0, \quad t \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.165}$$

Per il calcolo di tale esponenziale di matrice si può far uso della trasformata Zeta. Infatti, per la proprietà della trasformata di una funzione traslata nel tempo, il sistema precedente, nel dominio della variabile z, può essere scritto come:

$$zX(z) - zx_0 = FX(z), \tag{2.166}$$

da cui segue facilmente:

$$(zI - F)X(z) = zx_0. \tag{2.167}$$

Nel campo razionale (e non, si badi bene, nel campo dei reali o dei complessi), la matrice $(zI - F)$ è non singolare, infatti il suo determinante è il polinomio caratteristico del sistema, per cui l'equazione precedente può essere risolta rispetto alla trasformata dello stato, trovando:

$$X(z) = z(zI - F)^{-1}x_0, \tag{2.168}$$

da cui, antitrasformando, segue:

$$x(t) = \mathcal{Z}^{-1}\left[z(zI - F)^{-1}\right]x_0, \tag{2.169}$$

e quindi, dal confronto con (2.165), segue:

$$F^t = \mathcal{Z}^{-1}\left[z(zI - F)^{-1}\right]. \tag{2.170}$$

Per quanto riguarda invece l'analisi di un sistema lineare a tempo discreto, il metodo della trasformata Zeta consente di determinare in modo semplice il legame ingresso-uscita, e cioè la matrice di trasferimento, di tale sistema. Si consideri allora il sistema:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, t \in \mathbb{Z}^+ \tag{2.171}$$

$$y(t) = Hx(t) + Du(t), \quad y \in \mathbb{R}^p. \tag{2.172}$$

Nel dominio della variabile z il sistema è quindi descritto da:

$$zX(z) - zx_0 = FX(z) + GU(z) \tag{2.173}$$

$$Y(z) = HX(z) + DU(z), \tag{2.174}$$

e quindi, tenendo conto della non-singolarità della matrice $(zI - F)$ nel campo delle funzioni razionali, si trova:

$$X(z) = (zI - F)^{-1}GU(z) + z(zI - F)^{-1}x_0, \tag{2.175a}$$
$$Y(z) = H(zI - F)^{-1}GU(z) + DU(z) + zH(zI - F)^{-1}x_0. \tag{2.175b}$$

Le due equazioni (2.175) descrivono completamente il sistema. La (2.175a) descrive l'effetto delle condizioni iniziali e dell'ingresso sullo stato, mentre la seconda descrive il legame tra le stesse grandezze e la funzione di uscita.

I termini delle (2.175) che descrivono l'effetto delle condizioni iniziali sullo stato e sull'uscita sono dette risposte libere, nello stato e nell'uscita, rispettivamente:

$$X_\ell(z) = z(zI - F)^{-1}x_0, \tag{2.176}$$
$$Y_\ell(z) = zH(zI - F)^{-1}x_0 \tag{2.177}$$

mentre i termini che descrivono l'effetto del segnale (vettoriale) di ingresso sullo stato e sull'uscita sono dette risposte forzate, nello stato e nell'uscita, rispettivamente:

$$X_f(z) = (zI - F)^{-1}GU(z), \tag{2.178}$$
$$Y_f(z) = H(zI - F)^{-1}GU(z) + DU(z). \tag{2.179}$$

Infine, la matrice di funzioni razionali

$$W(z) = H(zI - F)^{-1}G + D, \tag{2.180}$$

che descrive completamente il legame tra il segnale di ingresso e quello di uscita (nel caso di condizioni iniziali nulle), è detta *matrice di trasferimento* del sistema. Nel caso in cui sia il segnale di ingresso che quello di uscita siano scalari, e cioè nel caso $m = 1$ e $p = 1$, si parla di *funzione di trasferimento*.

2.6.5 Antitrasformata di funzioni razionali proprie

Il legame ingresso-uscita di un sistema lineare stazionario a tempo discreto è rappresentabile con una matrice di funzioni razionali proprie nella variabile z. Tenendo conto della forma della trasformata di segnali esponenziali e polinomiali, anche l'uscita di un sistema lineare, in risposta a segnali di questo tipo, è descritta, nel dominio di z, da una funzione razionale. È quindi di notevole importanza vedere come calcolare la trasformata inversa di una data funzione razionale $Y(z)$. Si procede esattamente come nel caso dei sistemi a tempo continuo, salvo l'opportunità di lavorare con la funzione $\overline{Y}(z) := \frac{1}{z}Y(z)$. Si noti che la funzione $Y(z)$ è propria, o strettamente propria, e quindi la funzione $\overline{Y}(z)$ è sempre strettamente propria.

Si consideri allora la seguente funzione $Y(z)$, propria e con denominatore monico:

$$Y(z) = \frac{\beta_n z^n + \beta_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \beta_1 z + \beta_0}{z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0}, \tag{2.181}$$

e si assuma, per semplicità, che le radici del denominatore siano tutte distinte (e complesse coniugate a coppia, se non reali), e non sia presente un polo nell'origine (perchè introdotto artificialmente nel seguito), cioè:

$$z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 = \prod_{i=1}^{n}(z - p_i), \quad p_i \neq p_j,\ i \neq j,\ p_i \neq 0. \tag{2.182}$$

Per ben noti risultati sulle funzioni razionali, la funzione $\overline{Y}(z) = \frac{1}{z}Y(z)$, che è sempre strettamente propria, può essere scomposta in frazioni parziali:

$$\overline{Y}(z) = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{A_n}{z - p_n}, \tag{2.183}$$

con $A_0 = \lim_{z\to 0} z\overline{Y}(z) = \lim_{z\to 0} Y(z)$ ed inoltre $A_i = \lim_{z\to p_i}(z - p_i)\overline{Y}(z) = A_i = \lim_{z\to p_i} \frac{(z - p_i)}{z}Y(z)$.

A partire dalla scomposizione in frazioni parziali (2.183), la funzione originale $Y(z)$ può essere riscritta come:

$$Y(z) = A_0 + A_1\frac{z}{z - p_1} + A_2\frac{z}{z - p_2} + \cdots + A_n\frac{z}{z - p_n}, \tag{2.184}$$

e quindi, tenendo conto della proprietà 2.11 di linearità e delle trasformate di segnali notevoli, si vede immediatamente che il segnale $y(t)$ è dato da:

$$y(t) = A_0\delta(t) + A_1 p_1^t + A_2 p_2^t + \cdots + A_n p_n^t. \tag{2.185}$$

Nel caso in cui alcuni poli del sistema abbiano molteplicità maggiore di uno, il procedimento è analogo, salvo la forma della espansione in frazioni parziali. In questo caso, possono essere presenti un numero qualsiasi di poli nell'origine. Sia allora $W(z)$ una generica funzione razionale propria,

$$W(z) = \frac{\beta_n z^n + \beta_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \beta_1 z + \beta_0}{z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0}. \tag{2.186}$$

e si consideri la funzione $\overline{W}(z) = \frac{1}{z} W(z)$, che è strettamente propria. Tale funzione può essere espansa in frazioni parziali nella forma:

$$\overline{W}(z) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{q_i} \frac{A_{i,j}}{(z - p_i)^j}, \tag{2.187}$$

dove r indica il numero di poli distinti della $\overline{W}(z)$, compreso il polo nell'origine, sicuramente presente, q_i indica la molteplicità del polo p_i, ed il generico residuo $A_{i,j}$ è calcolato come:

$$A_{i,j} = \lim_{z \to p_i} \left\{ \frac{1}{(q_i - j)!} \frac{d^{q_i - j}}{dz^{q_i - j}} \left[(z - p_i)^{q_i} \overline{W}(z) \right] \right\} = \lim_{z \to p_i} \left\{ \frac{1}{(q_i - j)!} \frac{d^{q_i - j}}{dz^{q_i - j}} \left[\frac{(z - p_i)^{q_i}}{z} W(z) \right] . \right\} \tag{2.188}$$

In tal caso, tenendo conto delle varie proprietà della trasformata Zeta, ed assumendo che p_1 indica il polo nell'origine ($p_1 = 0$), si ha:

$$w(t) = \mathcal{Z}^{-1}\left[W(z)\right] = \sum_{j=1}^{q_1} A_{1,j}\delta(t - j) + \sum_{i=2}^{r} \sum_{j=1}^{q_i} A_{i,j} \begin{pmatrix} t \\ j \end{pmatrix} {p_i}^{t-j}. \tag{2.189}$$

Un modo alternativo per tenere conto di possibili poli nell'origine nella funzione razionale da trattare consiste nel notare che un fattore z^ν a denominatore corrisponde ad un ritardo di ν passi della corrispondente funzione del tempo. Si possono quindi trascurare tali poli nulli, calcolare la trasformata inversa della funzione $\hat{Y}(z) = z^\nu Y(z)$, e poi traslare a destra (ritardare) di ν passi il segnale così ottenuto.

Tabella 2.3: trasformate Z notevoli

Funzione del tempo ($k \in \mathbb{Z}^+$)	Descrizione	Trasformata Z
$\delta_0(k)$	impulso unitario	1
$\delta_{-1}(k)$	gradino unitario	$\frac{z}{z-1}$
k	rampa unitaria	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\delta_{-1}(k-h)$	gradino unitario con inizio in $k=h$	$z^{-h}\frac{z}{z-1}$
a^k	potenza	$\frac{z}{z-a}$
$k\,a^k$		$\frac{a\,z}{(z-a)^2}$
$a^k\binom{k}{h}$	potenza-polinomio	$\frac{a^h\,z}{(z-a)^{h+1}}$
$\sin(k\theta)$	sinusoide	$\frac{z\sin(\theta)}{z^2-2z\cos(\theta)+1}$
$\cos(k\theta)$	cosinusoide	$\frac{z[z-\cos(\theta)]}{z^2-2z\cos(\theta)+1}$
$u(k-h)$		$z^{-h}U(z)$
$u(k+1)$		$zU(z)-zu(0)$
$a^k\,u(k)$		$U(\frac{z}{a})$
$\sum_{h=0}^{k} u(k-h)y(h)$		$U(z)Y(z)$
$ku(k)$		$-z\frac{d}{dz}U(z)$