**SISTEMA REALE $\longrightarrow$ MODELLO MATEMATICO**

- Definizione di modello matematico.
- Accuratezza di un modello matematico: precisione $\longleftrightarrow$ semplicità.
- Modelli ottenuti dalle leggi della fisica, chimica, etc ....
- Modelli ottenuti attraverso dati sperimentali.
- Modelli per i controlli automatici.

# CLASSIFICAZIONE MODELLI

- Modelli **dinamici** e non dinamici (statici).

- Modelli a parametri distribuiti ed a **parametri concentrati**.

- Modelli **deterministici** e stocastici.

- Modelli a **tempo-continuo**, a tempo-discreto, ed a dati campionati.

- Modelli **lineari** e non lineari.

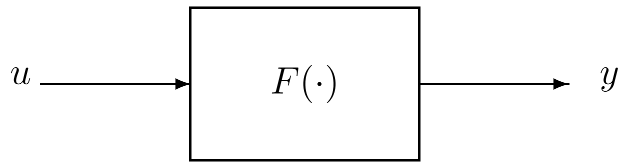
- Modelli **stazionari** (tempo-invarianti) e non stazionari (tempo-varianti).

- Modelli **causali** e non causali.

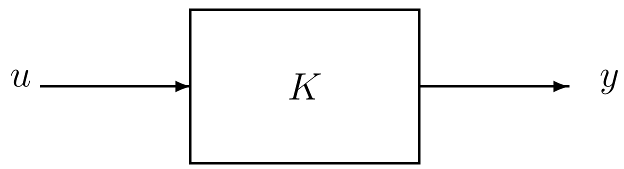
- Modelli scalari (**SISO**) e multivariabili (MIMO).

## RAPPRESENTAZIONE CON SCHEMI A BLOCCHI

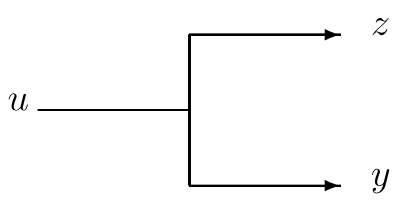
- Blocco elementare: $\quad y = F(u)$.

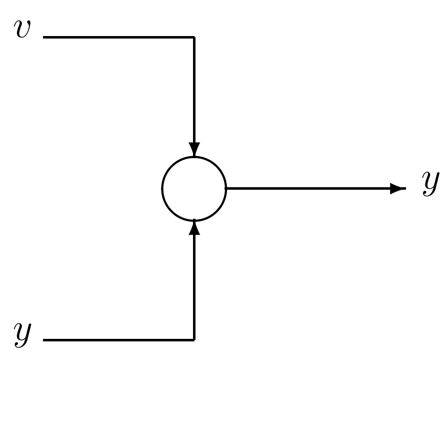



- Blocco lineare: $\quad F(u) = Ku$.




- Punto di diramazione e giunzione sommante.

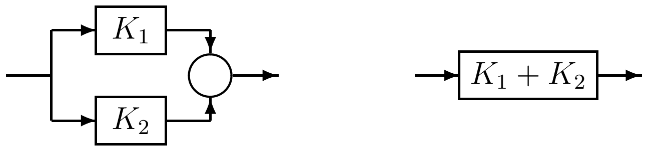


# REGOLE RIDUZIONE SCHEMI A BLOCCHI LINEARI

1. Riduzione di blocchi in cascata:


2. Riduzione di blocchi in parallelo:



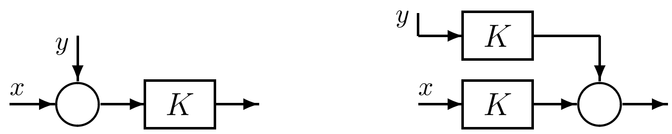

3. Riduzione di giunzioni sommanti:


4. Spostamento di un punto di prelievo di segnale a monte di un blocco:

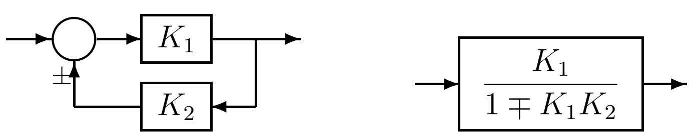

5. Spostamento di un punto di prelievo di segnale a valle di un blocco:


6. Spostamento di una giunzione sommante a monte di un blocco:


7. Spostamento di una giunzione sommante a valle di un blocco:




8. Eliminazione di un anello:



## MODELLI DI SISTEMI ELETTRICI

- Elementi costitutivi dei circuiti a costanti concentrate
  - Resistenza, Induttore, Condensatore

- Legge della conservazione della carica
  - Equazioni di equilibrio ai nodi
- Il campo elettrostatico è conservativo
  - Equazioni di equilibrio alle maglie

- Variabili di stato
  - Tensioni sui condensatori e correnti negli induttori
  - Relazione com l'energia del sistema

- Calcolo della funzione di trasferimento mediante risoluzione del circuito col metodo della trasformata di Laplace (vedi corso di Elettrotecnica!)

# MODELLI DI SISTEMI MECCANICI

## Sistemi di riferimento inerziale

- Notazione

$f = f(t) =$ forza

$C = C(t) =$ coppia

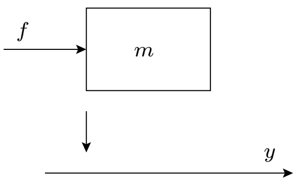
$y = y(t) =$ posizione lungo asse orientato

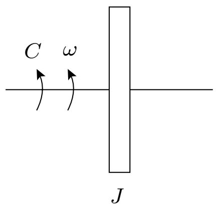
$\theta = \theta(t) =$ posizione angolare orientata

$u = u(t) = \dot{y}(t) =$ velocità di traslazione

$\omega = \omega(t) = \dot{\vartheta}(t) =$ velocità angolare

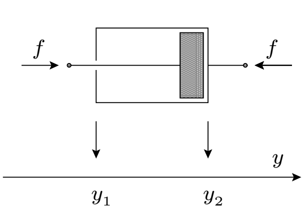
- Corpo rigido con massa prevalente

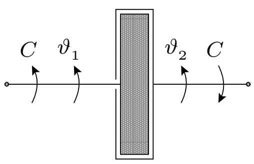



$f = m\,\dot{u}$ $\qquad$ $C = J\,\dot{\omega}$

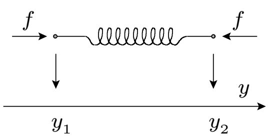
- Ammortizzatore con attrito viscoso prevalente

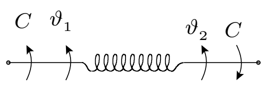



$f = \beta(u_1 - u_2)$ $\qquad$ $C = \beta(\omega_1 - \omega_2)$

- Molla con elasticità prevalente



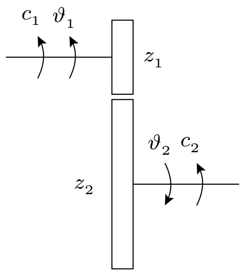




$f = k\,(y_1 - y_2)$ $\qquad$ $C = k\,(\vartheta_1 - \vartheta_2)$

# MODELLI DI SISTEMI MECCANICI

## Accoppiamenti cinematici

- Ruote dentate

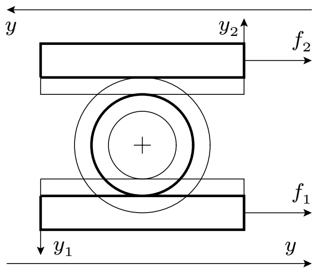



$$\tau = \frac{z_1}{z_2}$$

$$\vartheta_2 = \tau\,\vartheta_1$$

$$C_2 = \tau^{-1}\,C_1$$

- Meccanismo di rinvio

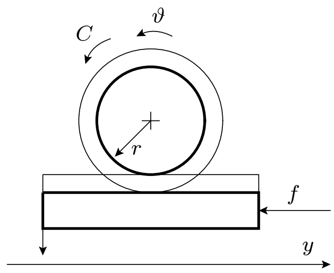



$$\tau = \frac{r_2}{r_1}$$

$$y_2 = \tau\,y_1$$

$$f_2 = \tau^{-1}\,f_1$$

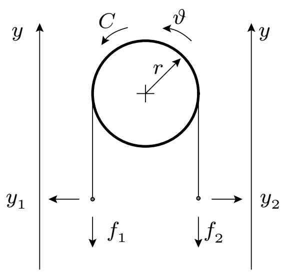
- Accoppiamento ruota - vite senza fine




$$y = r\,\vartheta$$

$$f = r^{-1}\,C$$

- Puleggia




$$y_2 = -y_1 = r\,\vartheta$$

$$f_2 - f_1 = r^{-1}\,C$$

## ANALOGIA SISTEMI MECCANICI-SISTEMI ELETTRICI

- Costruzione del circuito meccanico
- Equivalenza degli elementi costitutivi

| ELEMENTO MECCANICO | ELEMENTO ELETTRICO |
|---|---|
| Corpo rigido | Nodo di rete |
| Equilibrio di forze (coppie) al corpo rigido | Equilibrio di correnti al nodo |
| Forze e coppie | Correnti |
| Potenze, tempi, energie | Potenze, tempi, energie |

$$\Downarrow$$

Circuito elettrico equivalente al sistema meccanico

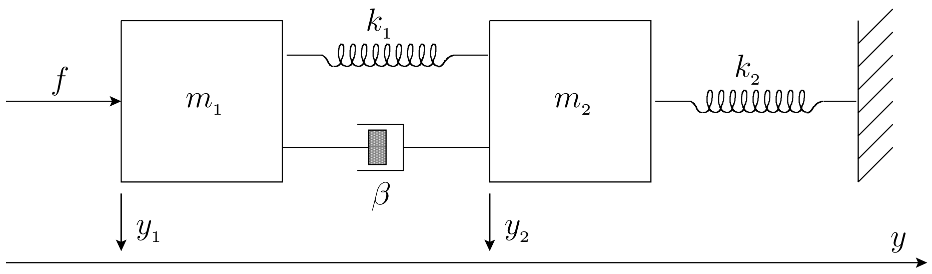
- Conservazione topologia.
- Le velocità sono analoghe a potenziali.
- Le masse sono analoghe a condensatori con armatura a terra ($C = M$).
- Le molle sono analoghe ad induttanze ($L = 1/K$).
- Gli smorzatori sono analoghi a resistenze ($R = 1/B$).
- Le forze applicate sono analoghe a generatori di corrente ($I = f$)
- Gli accoppiamenti cinematici sono analoghi a trasformatori.

## ESEMPIO DI SISTEMA MECCANICO (1/2)

**Variabili di stato**

- Velocità $u$, $\omega$ per le masse
- Forze/coppie per le molle

***Esempio:***




`Modello matematico:`

equazioni componenti elementari
+
equazioni equilibrio dinamico

Massa $m_1$: $\quad f - k_1(y_1 - y_2) - \beta(u_1 - u_2) = m_1\,\dot{u}_1$

Massa $m_2$: $\quad k_1(y_1 - y_2) + \beta(u_1 - u_2) - k_2\,y_2 = m_2\,\dot{u}_2$

`Funzione di trasferimento tra` $f$ `e` $y_2$`:`

$$G(s) = \frac{y_2(s)}{F(s)} = \frac{\beta\,s + k_1}{m_1\,m_2\,s^4 + \beta(m_1 + m_2)s^3 + [k_1(m_1 + m_2) + k_2\,m_1]s^2 + \beta\,k_2\,s + k_1\,k_2}$$

`Equazioni ingresso - stato - uscita:`

$$f_1 = k_1(y_1 - y_2) \qquad , \qquad f_2 = k_2\,y_2$$

$$\begin{cases} \dot{f}_1 &= k_1\,u_1 - k_1\,u_2 \\ \dot{f}_2 &= k_2\,u_2 \\ \dot{u}_1 &= m_1^{-1}[-f_1 - \beta\,u_1 + \beta\,u_2 + f] \\ \dot{u}_2 &= m_2^{-1}[f_1 - f_2 + \beta\,u_1 - \beta\,u_2] \\ y &= k_2^{-1}\,f_2 \end{cases}$$

# ESEMPIO DI SISTEMA MECCANICO (2/2)

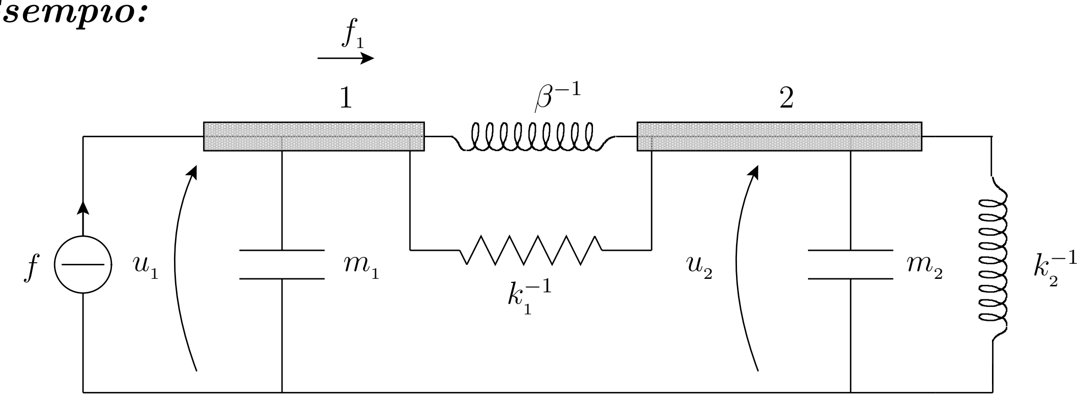
Poiché $f_1$ e $f_2$ sono legate linearmente a $y_1$ e $y_2$, si possono usare $y_1$ e $y_2$:

$$\begin{cases} \dot{u_1} &= m_1^{-1}[-\beta\, u_1 + \beta\, u_2 - k_1\, y_1 + k_1\, y_2 + f] \\ \dot{u_2} &= m_2^{-1}[\beta\, u_1 - \beta\, u_2 + k_1\, y_1 - (k_1 + k_2) y_2] \\ \dot{y_1} &= u_1 \\ \dot{y_2} &= u_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad C = [0\ 0\ 0\ 1]$$

## Analogia elettrica

***Esempio:***

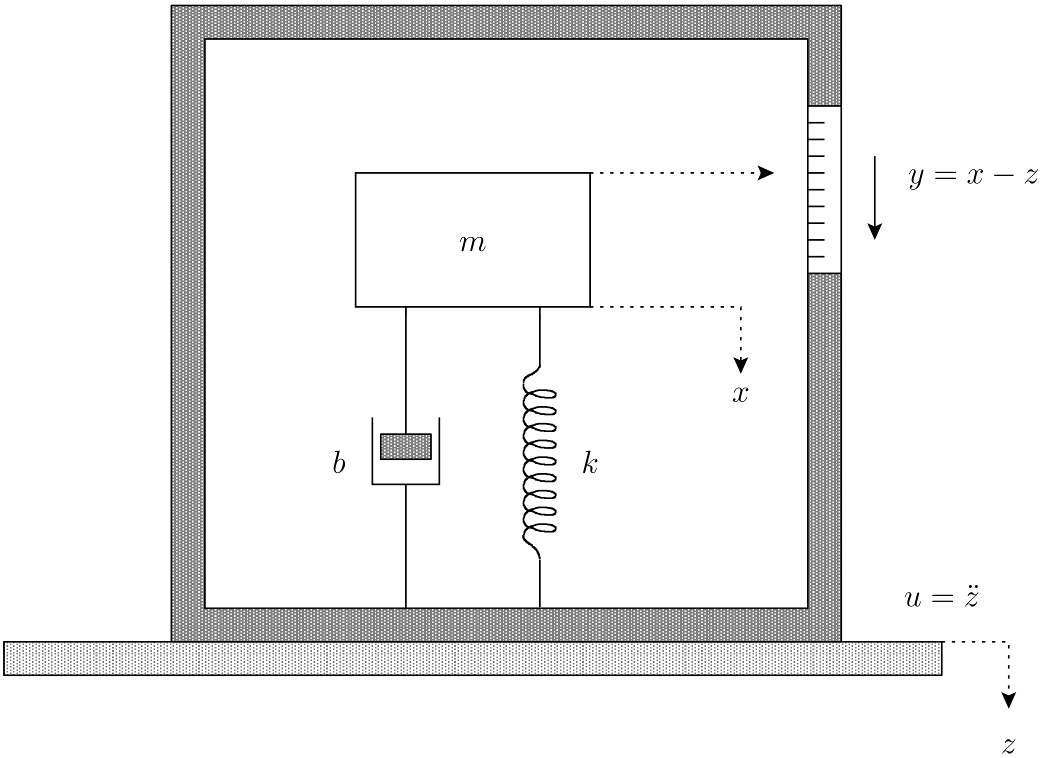



$$G(s) = \frac{U_2(s)}{s\, F(s)}$$

$$U_2(s) = F_1(s)\, \frac{s}{k_2 + m_2\, s^2}$$

$$F_1(s) = \frac{\frac{1}{s\, m_1}}{\frac{1}{s\, m_1} + \frac{1}{s\, m_2 + \frac{k_2}{s}} + \frac{1}{\beta + \frac{k_1}{s}}}$$

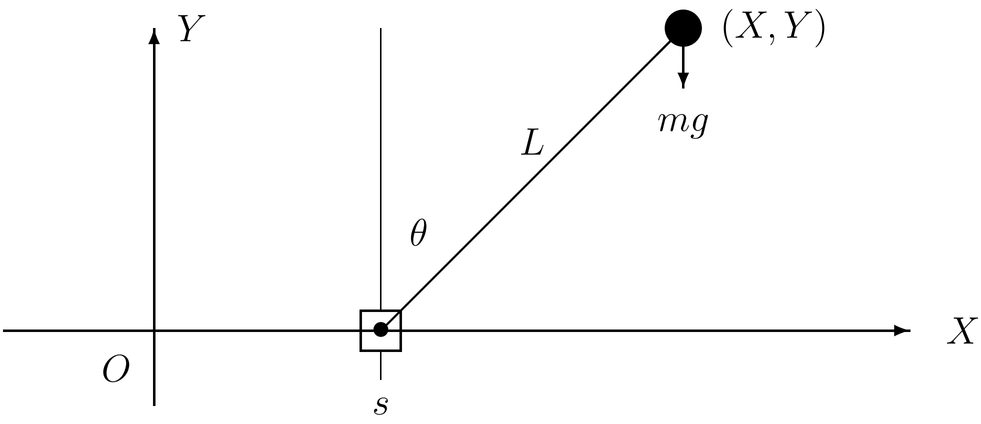
# ESEMPIO: ACCELEROMETRO DI TRASLAZIONE




- Schema a blocchi: $u := \ddot{z}$; $y := x - z$ ($D :=$ operatore di derivazione).

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\frac{-m}{mD^2 + bD + k}} \longrightarrow y(t)$$

# UN CLASSICO: IL PENDOLO INVERSO




- Dinamica del moto

$$mL\ddot{\theta}(t) = mg\sin\theta(t) - m\ddot{s}(t)\cos\theta(t)$$

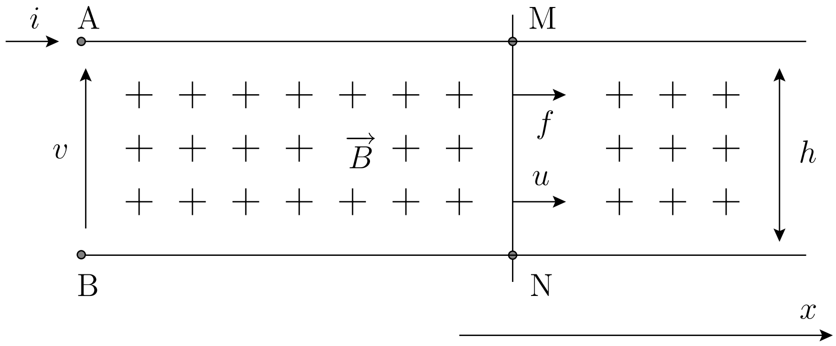
- Modello del pendolo inverso ($u(t) := \ddot{s}(t)$; $y(t) := \theta(t)$)

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= \frac{g}{L}\sin y(t) - \frac{1}{L}u(t)\cos y(t) && (1) \\ y(t_0) &= y_0 && (2) \\ \dot{y}(t_0) &= \dot{y}_0 && (3) \end{aligned}$$

# SISTEMI ELETTROMECCANICI

Il funzionamento è basato sulla conversione dell'energia elettrica/meccanica.

`Fondamento:`




$$\Delta x \quad \rightarrow \quad \Delta\Phi = B\,h\,\Delta x$$

`Legge dell'induzione elettromagnetica`

$$v = \frac{d\Phi}{dt} = B\,h\,\frac{dx}{dt} = B\,h\,u$$

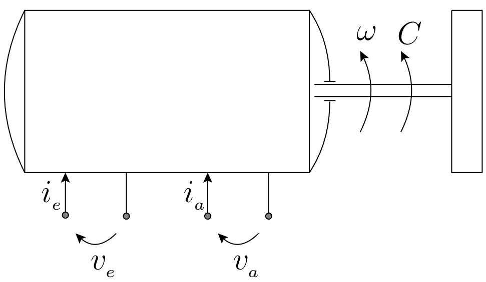
`Legge di conservazione dell'energia (in assenza di perdite)`

$$v\,i = f\,u \quad \rightarrow \quad f = B\,h\,i$$

`Equazioni di funzionamento per macchine lineari`

$$\begin{cases} v = B\,h\,u \\ f = B\,h\,i \end{cases}$$

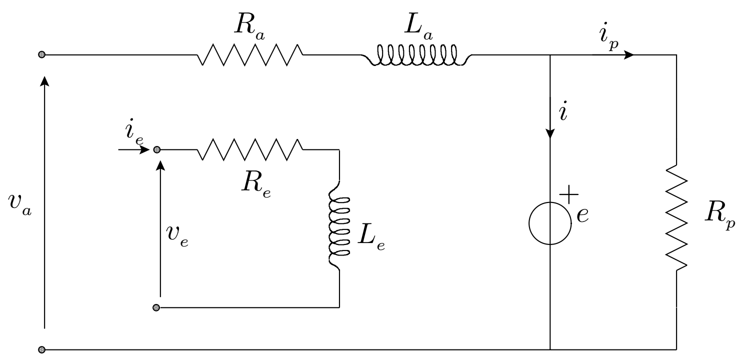
`Equazioni di funzionamento per macchine rotanti`




$$v_a = K\,\Phi\,\omega$$

$$C = k\,\Phi\,i_a$$

# MODELLO MACCHINA CON PARAMETRI PARASSITI

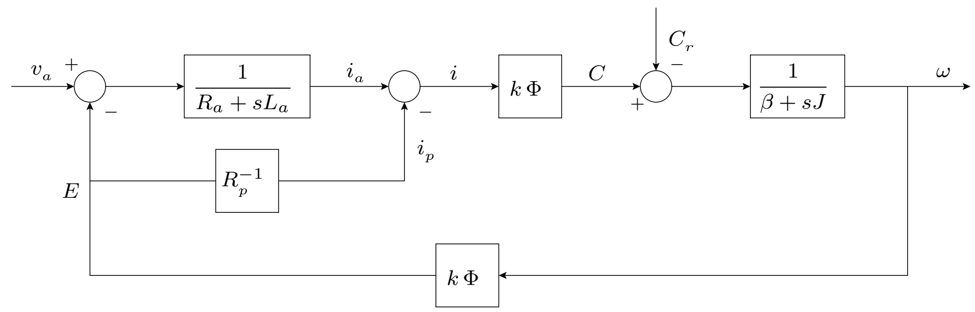


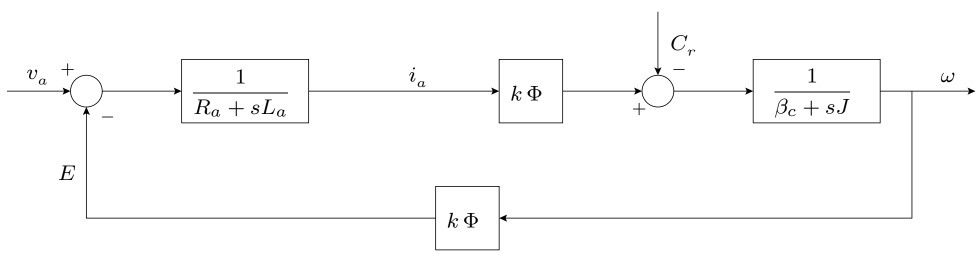

$$
\begin{aligned}
E &= k\,\Phi\,\omega \\
C &= k\,\Phi\,I \\
I_a &= I + I_p \\
V_a &= E + (R_a + s\,L_a)\,I_a \\
V_e &= (R_e + s\,L_e)\,I_e \\
I_p &= \tfrac{E}{R_p} \\
\Phi &\simeq K_e\,I_e \\
C &= C_r + \omega(\beta + s\,J)
\end{aligned}
$$

## Schemi a blocchi

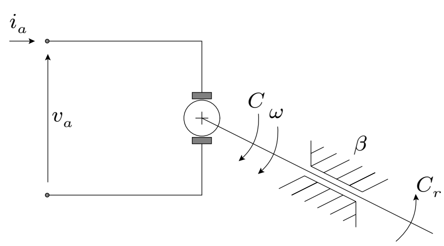
`Motore con comando in armatura`

Comando=$V_a$ , Disturbo=$C_r$ , Variab. contr.=$\omega$ , Flusso=$\Phi$ costante




$$\beta_c = \beta + k^2\,\Phi^2\,R_p^{-1}$$



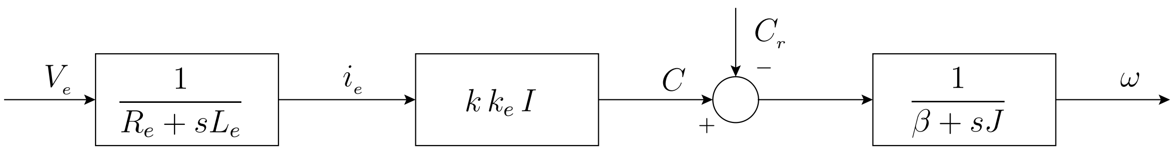
# SISTEMI ELETTROMECCANICI

`Motore con comando in eccitazione`

Comando=$V_e$ , Varib. contr.=$\omega$ , Disturbo=$C_r$ , Corr. armatura costante

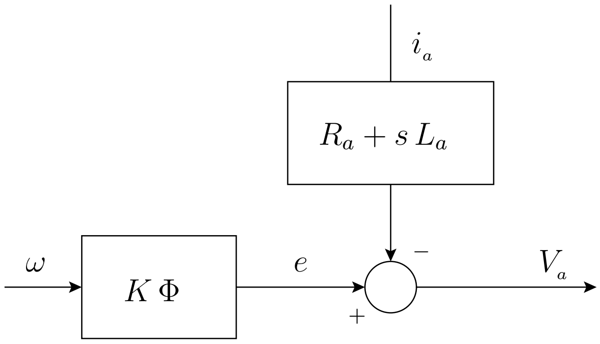
*Equazioni funzionanti:*

$$\begin{aligned}
C &\simeq K\,K_e\,I\,I_e = \underbrace{(K\,K_e\,I)}_{costante}\,I_e \\
I &= I_a - I_p \\
I_p &= E_m/R_p \simeq costante << I_a \\
V_e &= (R_e + sL_e)\,I_e \\
C &= C_r + \omega(\beta + sJ)
\end{aligned}$$




`Dinamo con comando in velocità`

Comando=$\omega$ , Disturbo=$i_a$ , Uscita=$v_a$ , Flusso $\Phi$=costante




Dinamo tachimetrica

**MODELLI DI SISTEMI IDRAULICI**

- Liquidi incomprimibili, privi di viscosità interna e attrito con le pareti dei condotti ed in moto stazionario.

Vale la Legge di Bernoulli:

$$p + \rho\, g\, h + \frac{1}{2}\,\rho\, u^2 = costante$$

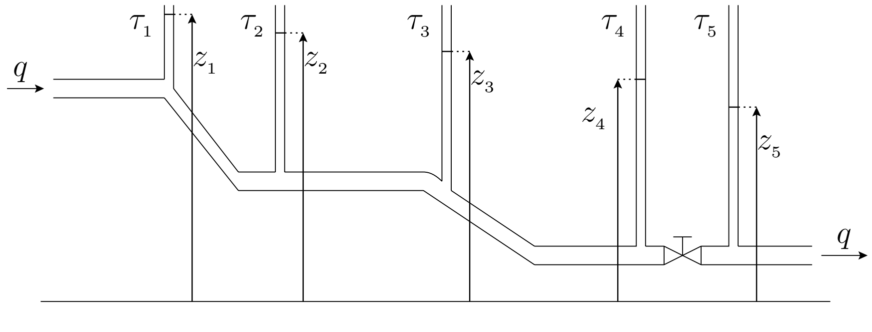
$p$=pressione , $\rho$=massa specifica , g=acc. gravità , $u$=velocità del liquido

$$y = \underbrace{\frac{p}{\rho\, g}}_{z} + h + \frac{u^2}{2\, g} = costante$$

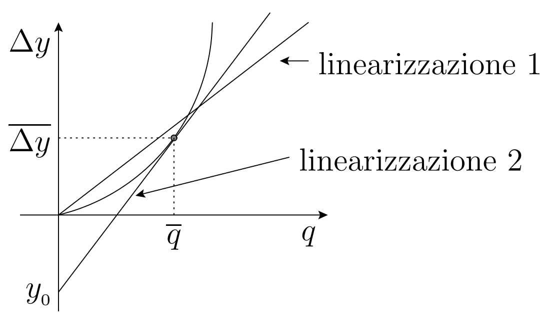
$y$=carico totale idraulico , $z$=carico piezoelettrico

- Resistenza idraulica

Per liquidi con attrito interno/esterno lungo una condotta si verificano perdite del carico idraulico in funzione della *portata* in volume $q = A\, u$ ($A$=sezione condotta).




La caduta di carico $\Delta y$ è funzione non lineare di $q$.



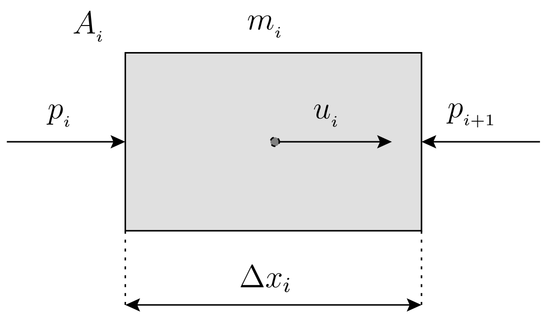

Linearizzazione 2: $\Delta y = R\, q + y_0$ , $R$=resistenza idraulica $\left[\frac{s}{m^2}\right]$

# MODELLI DI SISTEMI IDRAULICI

- Inerzia idraulica

Si manifesta nel *moto vario*.

Un tratto di condotta:




$A_i$: sezione della condotta

$\Delta x_i$: lunghezza tratto condotta

$m_i = \rho\, A_i\, \Delta x_i$: massa liquido

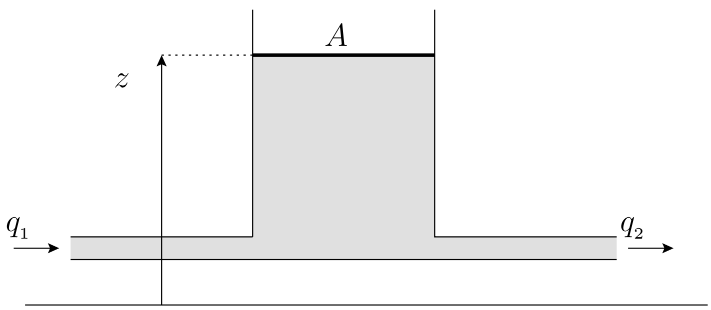
$u_i = q/A_i$

`Equazioni equilibrio dinamico:`

$$m_i\, \dot{u}_i = A_i(p_i - p_{i-1})$$
$$\Delta y_i = \frac{p_i - p_{i-1}}{\rho\, g} = \underbrace{\frac{\Delta x_i}{g\, A_i}}_{L_i}\, \dot{q}$$

$L_i$: inerzia idraulica $\left[\frac{s^2}{m^2}\right]$

- Capacità idraulica




`Equazione di conservazione della massa:`

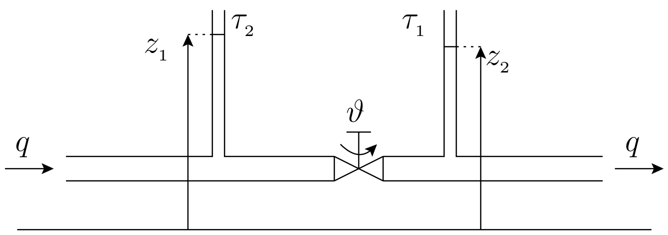
$$q_1 - q_2 = A\, \dot{z} = A\, \dot{y}$$

$A$: Capacita idraulica $\left[m^2\right]$

- Analogia elettrica

# MODELLI DI SISTEMI IDRAULICI

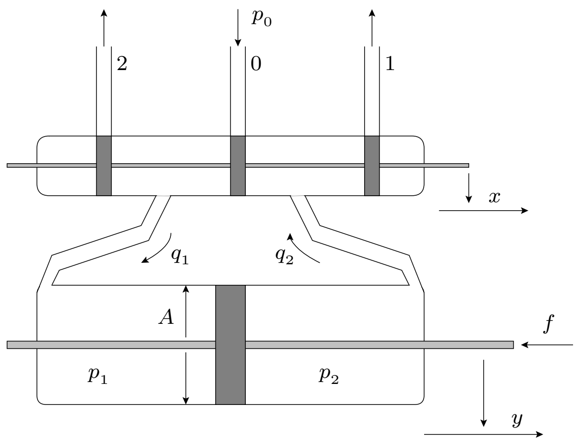
- Valvola ad apertura variabile




$$\Delta y = \Delta y(q, \vartheta) \simeq \Delta y_0 + R\, q - \lambda \vartheta$$

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta y_0$ | : | costante di linearizzazione |
| $R$ | : | resistenza idraulica media |
| $\vartheta$ | : | angolo di apertura |
| $\lambda$ | : | coefficiente di comando |

*Esempio: servomotore oleodinamico*




$$\begin{cases} q_1 = k\, x \sqrt{p_0 - p_1} & q_1^2 = (k\, x)^2 (p_0 - p_1) \\ q_2 = k\, x \sqrt{p_2} & q_2^2 = (k\, x)^2\, p_2 \\ q_1 = q_2 = q \end{cases}$$

Dunque:

$$q = \frac{k\, x}{\sqrt{2}} \sqrt{p_0 - \Delta p} \qquad , \qquad \Delta p = p_1 - p_2$$

Linearizzando (cost. linearizz.=0): $\quad \Delta p \simeq k_1\, x - k_2\, q$

# MODELLI DI SISTEMI IDRAULICI

Equilibrio del pistone di potenza

$$A\,\Delta p - f = (\beta + m\,s)\,u$$

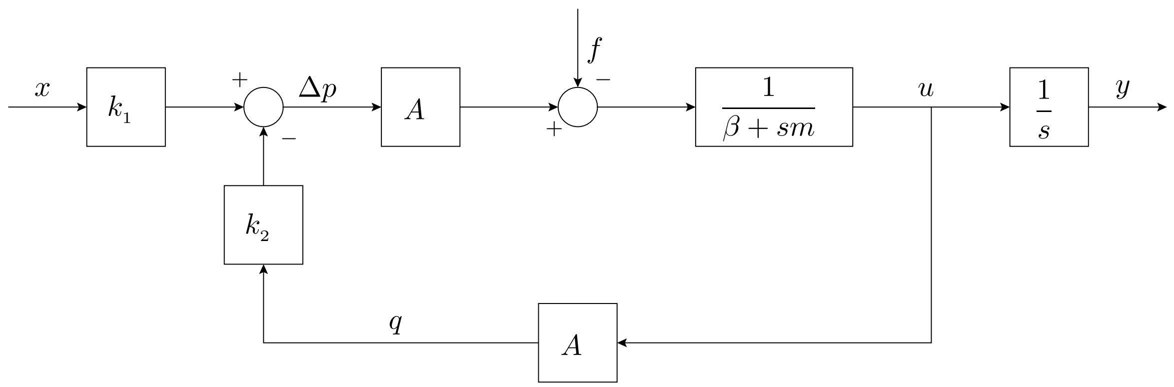
$m$: massa pistone+carico

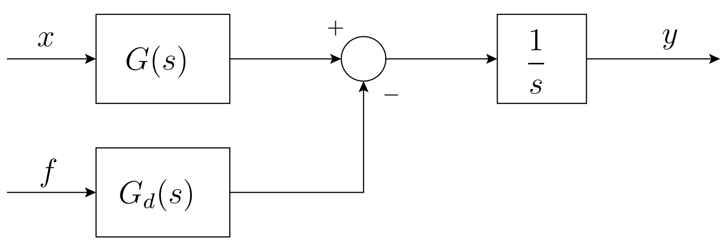
$\beta$: coefficiente di attrito

Portata:

$$q = A\,u$$

Schema a blocchi:

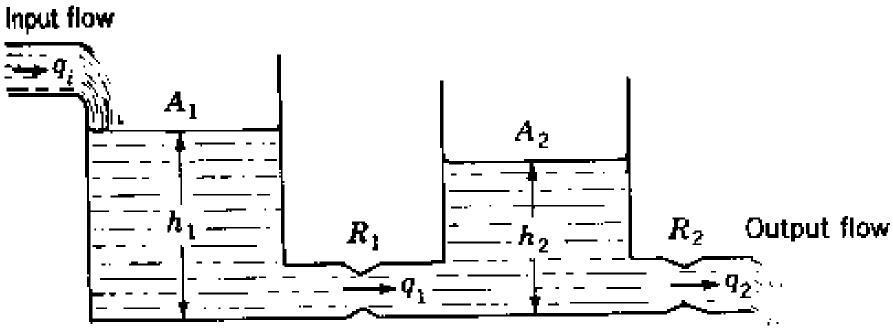



$$G(s) = \frac{k_1\,A}{\beta_c + m\,s} \quad , \quad G_d(s) = \frac{1}{\beta + m\,s} \quad , \quad \beta_c = \beta + k_2\,A^2$$

# MODELLI DI SISTEMI IDRAULICI

- Esempio di circuito idraulico




- Pressione atmosferica come pressione di riferimento
- Primo serbatoio

$$q_i - q_1 = A_1 \dot{y}_1$$

- Primo tratto di condotta

$$y_1 - y_2 = R_1 q_1$$

- Secondo serbatoio

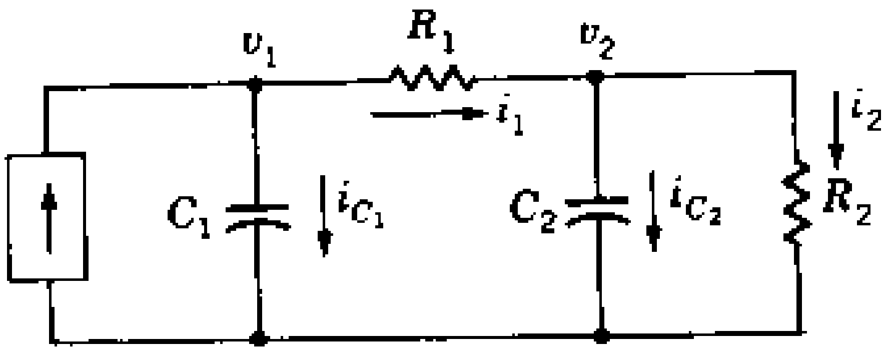
$$q_1 - q_2 = A_2 \dot{y}_2$$

- Secondo tratto di condotta (uscita fluido a pressione atmosferica)

$$y_2 - 0 = R_2 q_2$$

# MODELLI DI SISTEMI IDRAULICI

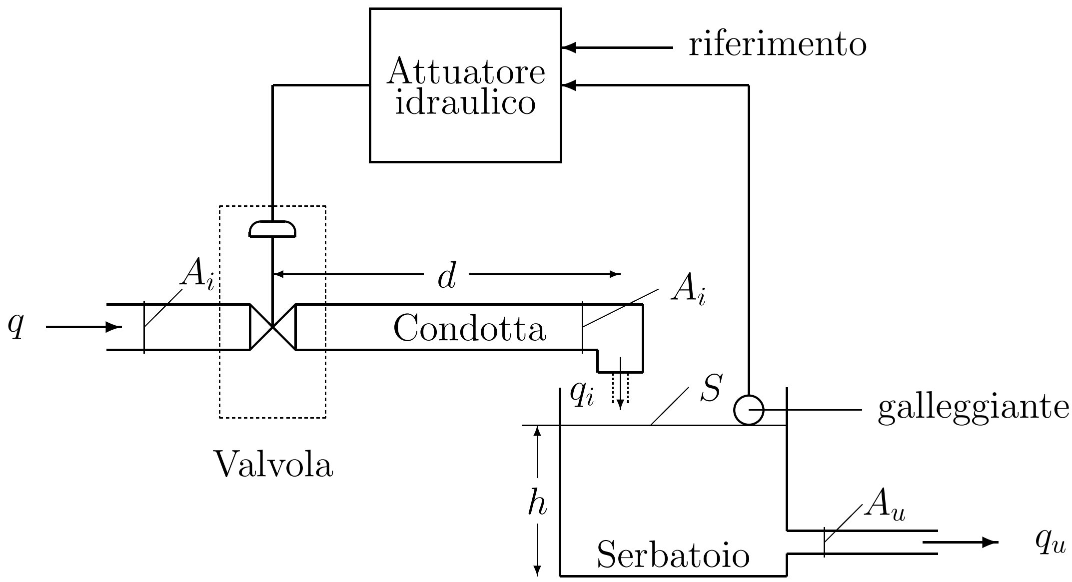
- Equivalente elettrico




- Equivalenza generale tra circuiti idraulici ed elettrici

| ELEMENTO IDRAULICO | ELEMENTO ELETTRICO |
|---|---|
| Portata | Corrente |
| Carico idraulico | Tensione |
| Capacità idraulica | Capacità |
| Resistenza idraulica | Resistenza elettrica |
| Inerzia idraulica | Induttanza |

## UN ALTRO CLASSICO: MODELLO DI UN SERBATOIO




- Modello del serbatoio e della condotta.

  – Principio di conservazione della massa

$$q_i - q_u = S\frac{dh}{dt}$$

  – Bernoulli (velocità pelo trascurabile, pressione atmosferica)

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho\frac{q_u^2}{A_u^2}$$

# MODELLO DI UN SERBATOIO

- Modello del serbatoio.

$$\frac{d}{dt}h(t) = -\frac{A_u\sqrt{2g}}{S}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{S}q_i(t)$$

- Modello della condotta.

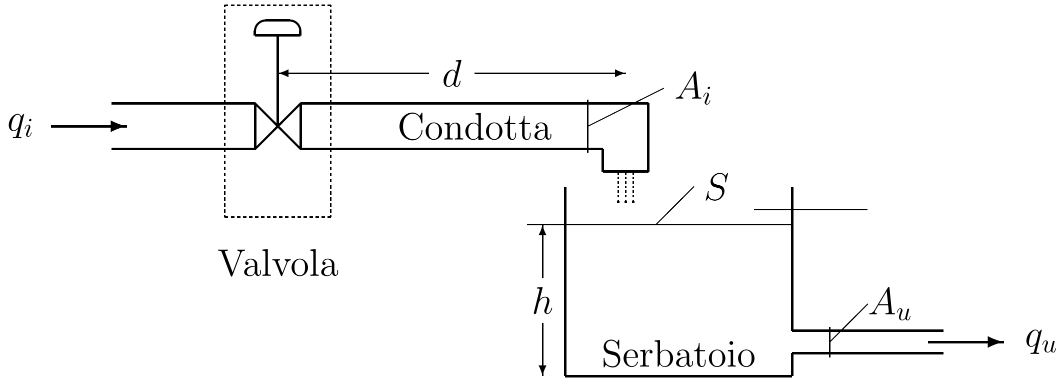
$$q_i(t) = q(t-T)$$

- Modello condotta+serbatoio ($u(t) := q(t)$; $y(t) := h(t)$)

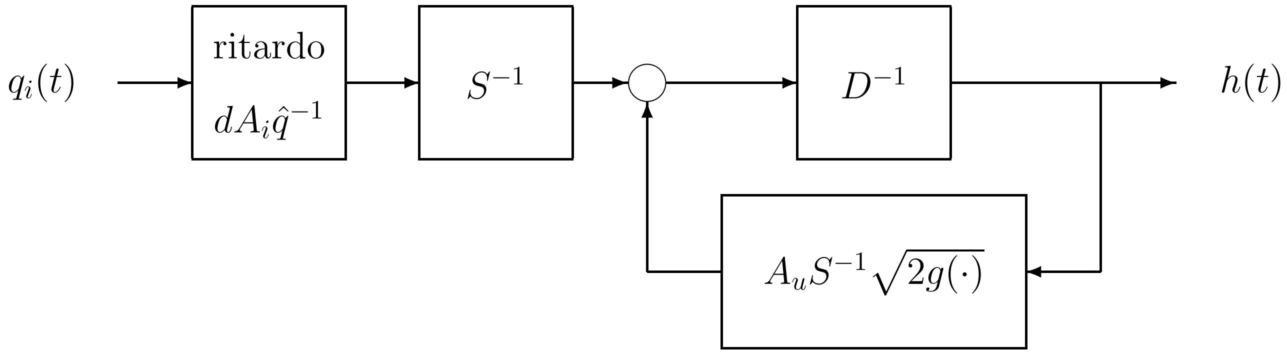
$$\frac{d}{dt}y(t) = -\frac{A_u\sqrt{2g}}{S}\sqrt{y(t)} + \frac{1}{S}u(t-T) \tag{4}$$

$$y(t_0) = y_0 \tag{5}$$

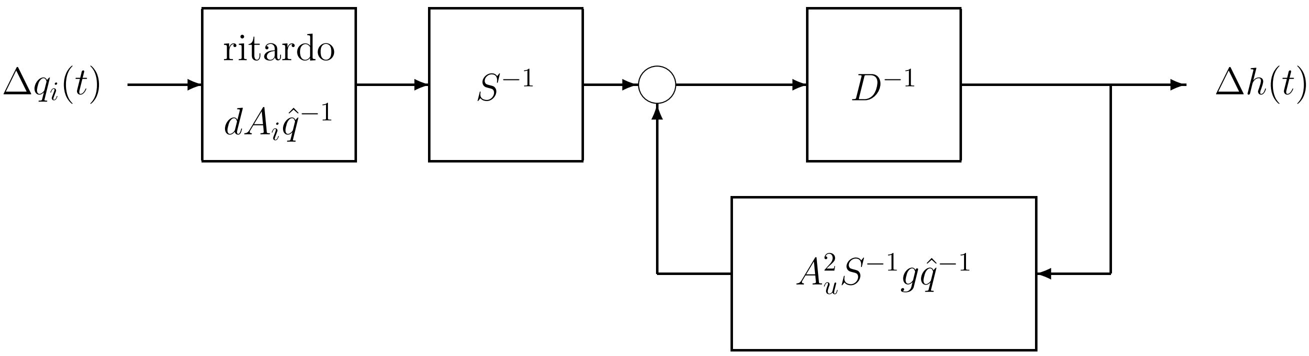
# MODELLO DI UN SERBATOIO




- Schema a blocchi modello non lineare.




- Schema a blocchi modello linearizzato ($\Delta h$ e $\Delta q_i$ sono le variazioni).

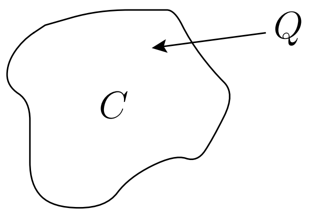


# MODELLI DI SISTEMI TERMICI

- I fenomeni termici (es. conduzione del calore) sono in genere rappresentati da equazioni alle derivate parziali.
- Ipotesi di temperatura costante spazialmente $\Rightarrow$ costanti concentrate
  - Corpi di piccole dimensioni e fluidi perfettamente mescolati
- Capacità termica

$$Q = C \cdot \Delta T$$

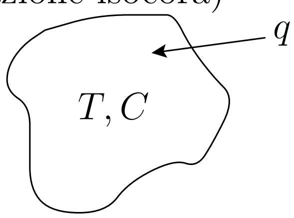
$$C = C_s \cdot M$$




$Q$: calore scambiato, $\Delta T$: variazione temperatura, $C_s$: calore specifico.

- Conservazione dell'energia (trasformazione isocora)

$$q = \frac{dQ}{dt} = C\,\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt}$$

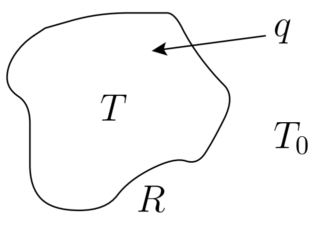



$q$: potenza termica, $U$: energia interna

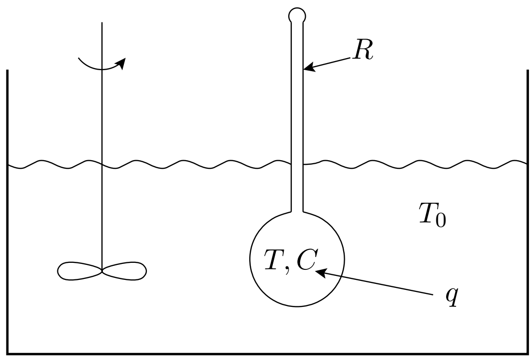
La temperatura $T$ è una variabile di stato

- Modello di conduzione a costanti concentrate (resistenza termica)

$$q = \frac{1}{R}\,(T_0 - T)$$



## ESEMPIO: TERMOMETRO A MERCURIO



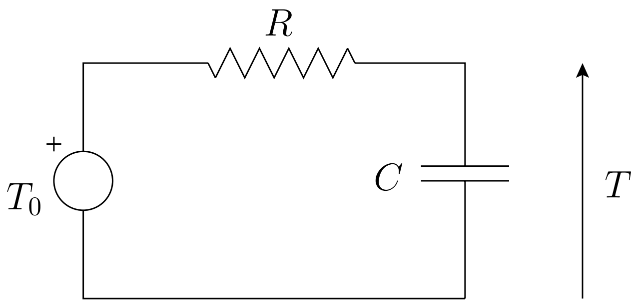

| | | |
|---|---|---|
| $R$ | $=$ | resistenza termica del bulbo |
| $C$ | $=$ | capacità termica del bulbo |
| $T$ | $=$ | temperatura del bulbo |
| $T_0$ | $=$ | temperatura del liquido |

$$\begin{cases} q = \dfrac{1}{R}(T_0 - T) & \text{(conduzione)} \\[2ex] q = C\,\dfrac{dT}{dt} & \text{(conservazione energia)} \end{cases}$$

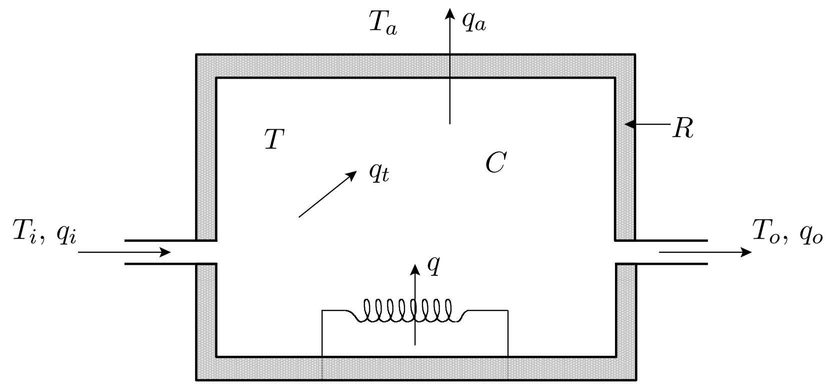
$$R\,C\,\frac{dT}{dt} = T_0 - T \qquad \longrightarrow \qquad \dot{T} = -\frac{1}{RC}\,T + \frac{1}{RC}\,T_0$$

$$s\,T(s) = -\frac{1}{RC}\,T(s) + \frac{1}{RC}\,T_0(s) \qquad \longrightarrow \qquad G(s) = \frac{T(s)}{T_0(s)} = \frac{1}{1 + s\,C\,R}$$

- Analogo elettrico



**ESEMPIO: SCALDABAGNO**




$$q_i + q = q_t + q_a + q_0$$

Conservazione dell'energia

- $q_t = C\,\dfrac{dT}{dt}$
- $q_0 = n\,C_s\,T$
- $q_i = n\,C_s\,T_i$
- $q_a = \dfrac{T - T_a}{R}$

| | | |
|---|---|---|
| $q_t$ | $=$ | calore assorbito dall'acqua |
| $R$ | $=$ | resistenza termica dell'acqua |
| $n$ | $=$ | flusso d'acqua in transito |
| $C_s$ | $=$ | calore specifico dell'acqua |

$$C\,\dot T + n\,c_s\,(T - T_i) + \frac{T - T_a}{R} = q$$

$$\dot T = -\frac{1}{C}\left(n\,C_s + \frac{1}{R}\right)T + \underbrace{\frac{n\,C_s}{C}\,T_i}_{ingresso} + \underbrace{\frac{1}{R\,C}\,T_a}_{ingresso} + \underbrace{\frac{1}{C}\,q}_{ingresso}$$