CALCOLO DEI POLI DI $W(s)$

- Passaggio da G a W quando G è assegnata in forma poli-zeri.

  – Espressione di G:

$$G(s) \;=\; K' \frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}, \qquad\qquad m<n$$

  – Poli di W:

$$\prod_{i=1}^{n}(s-p_i) + K' \prod_{j=1}^{m}(s-z_j) = 0 \qquad (1)$$

- Problema.

  – Assegnati i poli p_i e gli zeri z_j di G determinare le soluzioni di (1) al variare del guadagno K', ovvero il luogo delle radici (luogo positivo per $K'>0$, luogo negativo per $K'<0$).

PROPRIETÀ DEL LUOGO DELLE RADICI

- Condizione di fase:

  - un punto s del piano complesso appartiene al luogo delle radici se soddisfa

$$\sum_{i=1}^{n} \arg[s-p_i] - \sum_{j=1}^{m} \arg[s-z_j] = \begin{cases} (2h+1)\pi, \ \ h = 0, 1, \dots & \text{se } K' > 0 \\ 2h\pi, \ \ h = 0, 1, \dots & \text{se } K' < 0 \end{cases}$$

- Condizione di modulo:

  - ad ogni punto s appartenente al luogo delle radici corrisponde un guadagno

$$|K'| = \frac{\prod_{i=1}^{n} |s - p_i|}{\prod_{j=1}^{m} |s - z_j|}$$

- Esempio.

$$G(s) = K' \frac{1}{s(s-p)}, \qquad p < 0$$

PROPRIETÀ DEL LUOGO DELLE RADICI

1. Il luogo è simmetrico rispetto all'asse reale; la forma del luogo è invariante rispetto a traslazioni orizzontali del complesso di poli e zeri

2. Il luogo ha n rami che escono dai poli; m di questi arrivano negli zeri, gli altri $n-m$ divergono verso l'infinito

3. Al luogo positivo ($K' > 0$) appartengono i punti dell'asse reale che hanno alla propria destra un numero totale dispari di poli e zeri; la restante parte dell'asse reale appartiene al luogo negativo

4. Una radice multipla di ordine μ corrisponde a un punto in comune fra μ rami del luogo delle radici

5. Inclinazione della tangente al luogo in un polo p_j di molteplicità μ_j (luogo positivo)

$$\alpha_j = \frac{1}{\mu_j}\left[-\sum_{i=1}^{n}\arg[p_j - p_i] + \sum_{i=1}^{m}\arg[p_j - z_i] + (2h+1)\pi\right] \qquad h = 0, 1, \ldots$$

   Inclinazione della tangente al luogo in uno zero z_j di molteplicità μ_j (luogo positivo)

$$\beta_j = \frac{1}{\mu_j}\left[\sum_{i=1}^{n}\arg[z_j - p_i] - \sum_{i=1}^{m}\arg[z_j - z_i] - (2h+1)\pi\right], \qquad h = 0, 1, \ldots$$

6. Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi uscenti dal punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$$

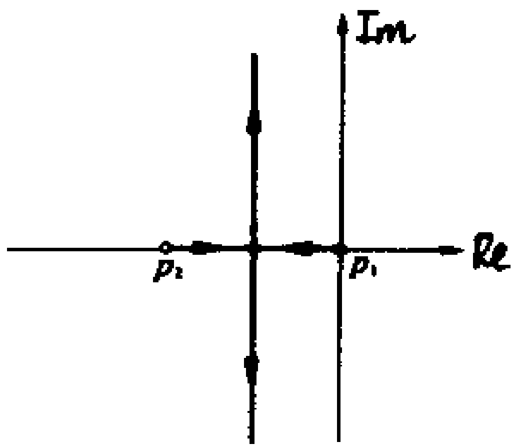
   e inclinati di (luogo positivo)

$$\theta = \frac{(2h+1)\pi}{n-m}, \qquad h = 0, 1, \ldots$$

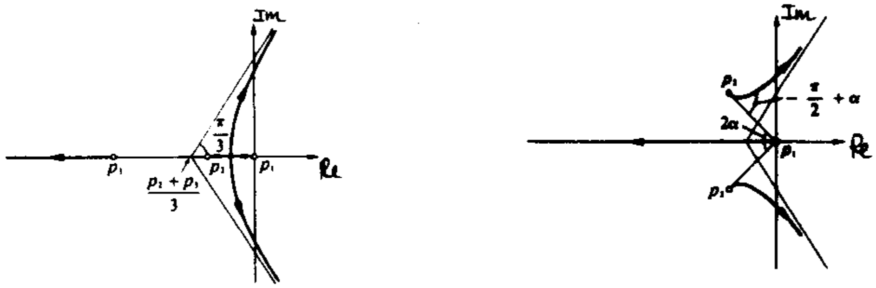
REGOLE PER LA COSTRUZIONE DEL LUOGO DELLE RADICI

- Riportare i poli e gli zeri sul piano complesso
- Determinare le parti dell'asse reale che appartengono al luogo positivo
- Determinare il centro e l'inclinazione dei raggi della stella degli $n-m$ asintoti
- Determinare la direzione della tangente al luogo nei poli e negli zeri
- Tenere conto che sui tratti di luogo appartenenti all'asse reale e compresi fra due poli o fra due zeri è presente almeno un punto doppio
- Alcuni esempi

$$G(s) = K' \frac{1}{s(s+p)}, \quad K', p > 0$$



$$G(s) = K' \frac{1}{s(s+p_1)(s+p_2)}, \quad \begin{cases} K', p_1, p_2 > 0 & \text{caso A} \\ K', \mathrm{Re}[p_1], \mathrm{Re}[p_2] > 0 & \text{caso B} \end{cases}$$



ULTERIORI CONSIDERAZIONI SUL LUOGO DELLE RADICI

- Calcolo delle intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario.

  - Uso del criterio di Routh: calcolo dei valori di K' per i quali la corrispondente tabella di Routh ha una riga di tutti zeri.

  - Uso del diagramma di Nyquist di G: calcolo dei valori della parte reale di $G(j\omega)$ in corrispondenza delle ω per le quali la parte immaginaria di $G(j\omega)$ è nulla.

- Taratura del luogo delle radici in K' e K.

- Luogo delle radici per sistemi non strettamente propri ($m = n$).

- Utilizzo del luogo alle radici per variazioni di un parametro diverso dal guadagno di G (contorno delle radici).

ESEMPI DI TRACCIAMENTO DEL LUOGO DELLE RADICI

$$G(s) = K' \frac{s - z}{s(s+1)(s+5)}$$