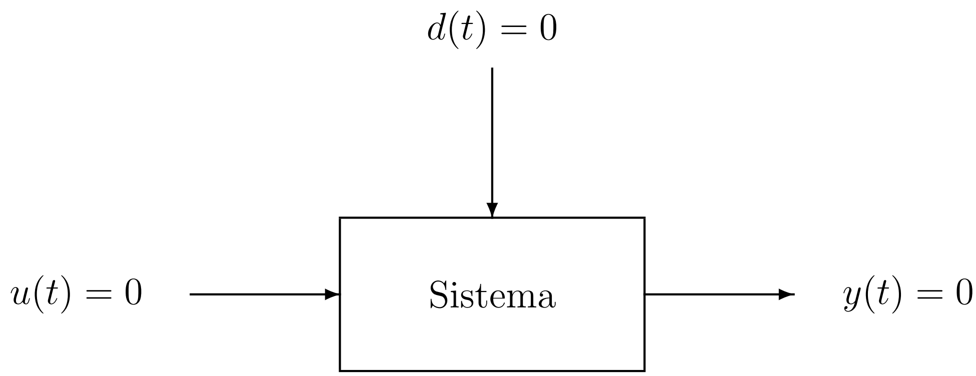
CONCETTO DI STABILITÀ NEI SISTEMI DI CONTROLLO

- Sistema in condizioni di equilibrio a $t = 0$.



- Tipi di perturbazione.

  – Perturbazione di durata limitata:

$$u(t) = 0,\ t > T_u \quad \& \quad \|u(t)\| \leq M_u \quad \forall t \geq 0$$

$$d(t) = 0,\ t > T_d \quad \& \quad \|d(t)\| \leq M_d \quad \forall t \geq 0$$

  – Perturbazione persistente:

$$\|u(t)\| \leq M_u \quad \forall t \geq 0$$

$$\|d(t)\| \leq M_d \quad \forall t \geq 0$$

STABILITÀ: PERTURBAZIONI DI DURATA LIMITATA

- Caratterizzazione risposta per perturbazioni di durata limitata.

  - La risposta è stabile se:
    - A) la norma dell'uscita è limitata, ovvero
      $\exists M_y > 0 : \quad \|y(t)\| \leq M_y;$
    - B) perturbazioni "piccole"inducono variazioni "piccole", ovvero
      $M_u \to 0 \ \& \ M_d \to 0 \implies M_y \to 0.$

  - La risposta è stabile asintoticamente se:
    - C) è stabile, ovvero valgono A) e B);
    - D) il sistema ritorna asintoticamente in condizioni di equilibrio,
      ovvero $t \to \infty \implies \|y(t)\| \to 0.$

  - La risposta è instabile negli altri casi.

- Conclusioni sulla stabilità della condizione di equilibrio rispetto a perturbazioni di durata limitata.

  - Stabilità: nessuna risposta è instabile ed almeno una è stabile.
  - Stabilità asintotica: tutte le risposte sono stabili asintoticamente.
  - Instabilità: almeno una risposta è instabile.

STABILITÀ: PERTURBAZIONI PERSISTENTI

- Caratterizzazione risposta per perturbazioni persistenti.

  - La risposta è stabile se:

    * A) la norma dell'uscita è limitata, ovvero
      $\exists M_y > 0 : \quad \|y(t)\| \leq M_y;$

    * B) perturbazioni "piccole"inducono variazioni "piccole", ovvero
      $M_u \to 0 \;\&\; M_d \to 0 \implies M_y \to 0.$

  - La risposta è instabile negli altri casi.

- Conclusioni sulla stabilità della condizione di equilibrio rispetto a perturbazioni persistenti.

  - Stabilità: tutte le risposte sono stabili.

  - Instabilità: almeno una risposta è instabile.

STABILITÀ DI SISTEMI LINEARI STAZIONARI

- Indipendenza dalla norma della perturbazione.

- Indipendenza dall'istante t_0.

- Indipendenza dalla condizione di equilibrio.

Stabilità del sistema

rispetto a perturbazioni di durata limitata

$$\Updownarrow$$

Carattere di convergenza della risposta libera

Stabilità del sistema

rispetto a perturbazioni persistenti di ampiezza limitata

$$\Updownarrow$$

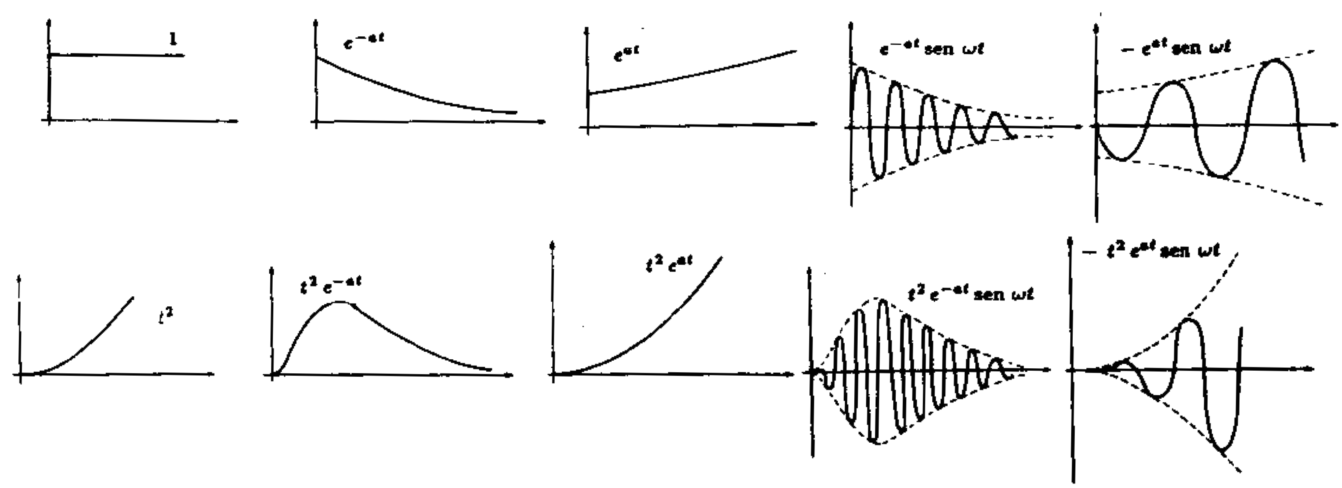
Limitatezza della risposta forzata

STABILITÀ DI SISTEMI LINEARI STAZIONARI

- Modello ingresso-uscita (i/u).

$$u(t) = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{P(D)}{Q(D)} \quad , Y_o} \longrightarrow y(t)$$

- Modi di un sistema lineare.



- Condizione per la stabilità: Non esistono poli della funzione di trasferimento con parte reale positiva e quelli con parte reale nulla sono semplici.

- Condizione per la stabilità asintotica: I poli della funzione di trasferimento hanno parte reale negativa.

CRITERI PER LA STABILITÀ DI UN POLINOMIO

- Polinomio di grado n

$$P_n(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots a_1 s + a_0$$

- Condizione necessaria per la stabilità asintotica: $a_i > 0$ per ogni $i = 0, 1, \dots, n-1$

- Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità asintotica: criterio di Routh.

  – Costruzione tabella di Routh.

$$\begin{array}{c|cccc}
n & 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & \\
\cdots & \cdots & & &
\end{array}$$

$$\boxed{b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad b_{n-4} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_{n-5}}{a_{n-1}}}$$

  – Ad ogni variazione di segno che si presenta nella prima colonna della tabella corrisponde una radice con parte reale positiva e ad ogni permanenza una radice a parte reale negativa.

CRITERI PER LA STABILITÀ DI UN POLINOMIO

- Presenza di uno zero in una colonna diversa dalla prima.

- Presenza di uno zero nella prima colonna della tabella.

  - Altri elementi della riga non tutti nulli.

    1. metodo ϵ: si sostituisce ϵ al posto dello 0 e si continua la tabella studiando alla fine il comportamento per $\epsilon = 0$.
    2. metodo del binomio: si ripete l'algoritmo di Routh per il polinomio $(s + \lambda)P_n(s)$ dove λ è scelto a piacere.

  - Altri elementi della riga tutti nulli

    1. metodo del polinomio ausiliario: si applica il criterio di Routh fino alla riga precedente quella nulla. L'analisi viene completata prima costruendo il polinomio ausiliario $P_a(s)$ definito dagli elementi della riga precedente e quindi applicando il procedimento di Routh al polinomio $P_a(s) + dP_a(s)/ds$. In tal caso ogni variazione di segno corrisponde ad una radice a parte reale positiva e ogni permanenza ad una radice a parte reale nulla o negativa.

CRITERI PER LA STABILITÀ DI UN POLINOMIO

- Diagramma polare di $P_n(s)$

$$P_n(j\omega) = (j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots a_1 j\omega + a_0$$

- Criterio di Michailov: $P_n(s)$ è stabile asintoticamente se e solo se

  1. il diagramma polare di $P_n(j\omega)$ non attraversa l'origine;
  2. la variazione di fase di $\arg[P_n(j\omega)]_0^{+\infty}$ vale $n\pi/2$.

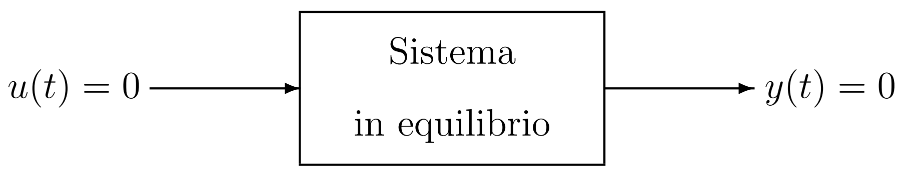
- Osservazioni.

  – Curvatura dei polinomi stabili.

  – Calcolo delle radici a parte reale maggiore di zero.

  – Separazione zeri parte reale e parte immaginaria di $P_n(j\omega)$.

STABILITÀ INGRESSO LIMITATO - USCITA LIMITATA



- Definizione di stabilità ILUL (ingresso limitato - uscita limitata)

  – Un sistema in stato di equilibrio si dice ILUL stabile se ad ogni segnale in ingresso la cui ampiezza non superi un determinato limite corrisponde una risposta limitata, ovvero

$$\exists M_u, M_y > 0 \; :$$
$$\forall u(\cdot) \; : \; |u(t)| \leq M_u \;\; \forall t \geq t_o \implies |y(t)| \leq M_y \;\; \forall t \geq t_o$$

STABILITÀ INGRESSO LIMITATO - USCITA LIMITATA

- Criterio di stabilità ILUL per sistemi lineari stazionari.

  – Un sistema lineare è ILUL stabile se e solo se vale

  $$\int_0^{\infty} |g(t)| dt \leq M < \infty$$

  – Dimostrazione parte sufficiente:

  $$|y(t)| = |\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau| \leq \int_0^t |g(t-\tau)||u(\tau)|d\tau \leq$$

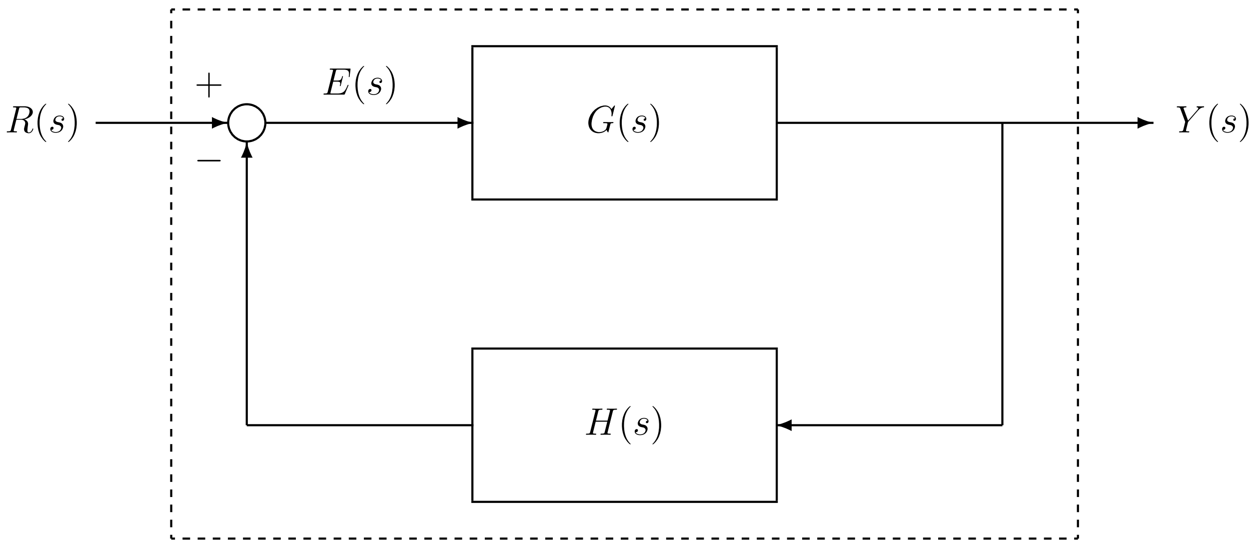
  $$\leq \int_0^t |g(t-\tau)|d\tau M_u \leq M M_u = M_y$$

  – Dimostrazione parte necessaria:

  per assurdo scegliendo, una volta assegnato t, il segnale di ingresso

  $$u(\tau) = \mathrm{sign}[g(t-\tau)]$$

INTERCONNESSIONE DI SISTEMI IN RETROAZIONE

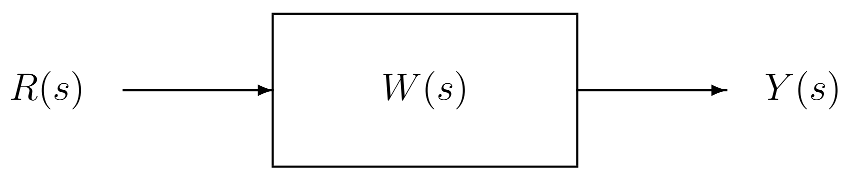


- Notazioni.

  - $r(t)$: segnale di riferimento
  - $y(t)$: variabile controllata
  - $e(t)$: segnale errore
  - $G(s)$: funzione di trasferimento della catena diretta
  - $H(s)$: funzione di trasferimento della catena di retroazione
  - $L(s) \doteq G(s)H(s)$: guadagno d'anello

INTERCONNESSIONE DI SISTEMI IN RETROAZIONE

- Sistema equivalente ingresso-uscita



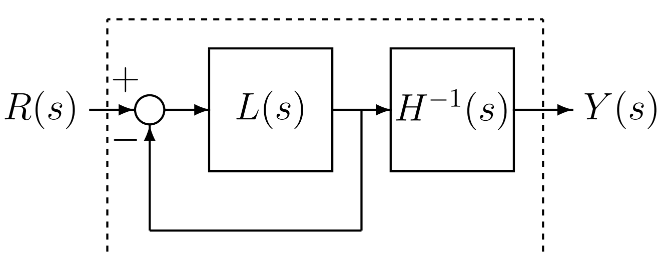
  – $W(s)$: funzione di trasferimento da anello chiuso

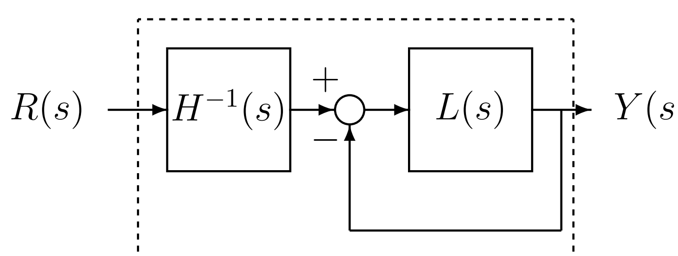
$$W(s) \;=\; \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \;=\; \frac{G(s)}{1+L(s)}$$

  – Ipotesi: il sistema è ben posto, ovvero $1 + L(s)$ non è identicamente nullo.

  – Riduzione a retroazione unitaria

$$W(s) \;=\; \frac{1}{H(s)}\frac{L(s)}{1+L(s)}$$





INTERCONNESSIONE SISTEMI IN RETROAZIONE

- Problema.

  Ottenere una rappresentazione di $W(s)$ note quelle di $G(s)$ e $H(s)$.

  – Gli zeri di $W(s)$ sono definiti dagli zeri di $G(s)$ e dai poli di $H(s)$.

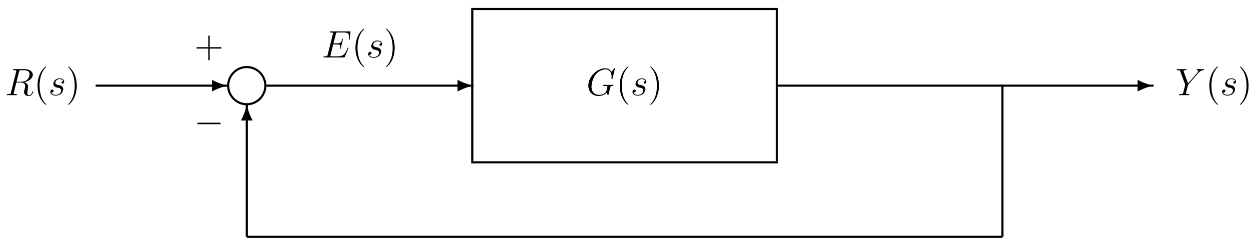
  – I poli di $W(s)$ sono definiti dagli zeri dell'equazione nella variabile s

$$G(s)H(s) + 1 = 0$$

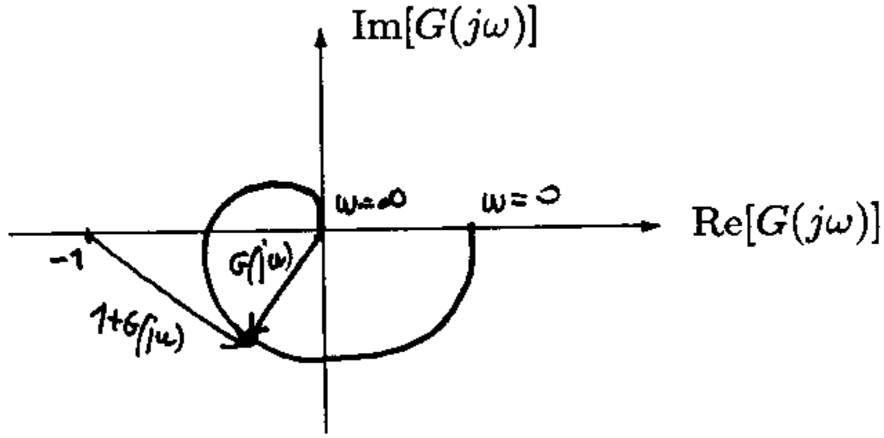
  – La risposta in frequenza $W(j\omega)$ risulta

$$W(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$$

SISTEMA A RETROAZIONE UNITARIA



- Passaggio da G a W quando G è assegnata in forma grafica



- Osservazione: relazione bilineare fra W e G

$$W + WG - G = 0$$

- Proprietà relazioni bilineari fra quantità complesse.
  - Sono rappresentazioni conformi e trasformano circonferenze di un piano complesso in circonferenze dell'altro piano

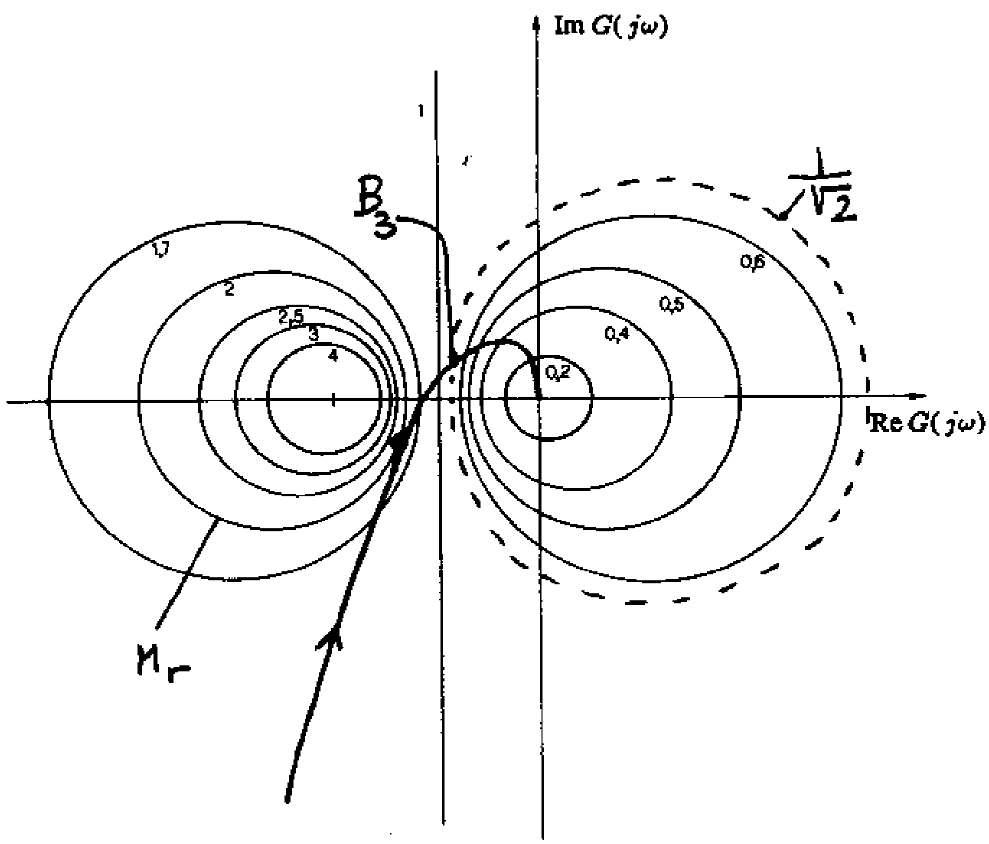
CIRCONFERENZE A MODULO COSTANTE

- La circonferenza $|W(j\omega)| = M$ nel piano di W è trasformata nella circonferenza del piano di G di centro

$$\left(\frac{M^2}{1 - M^2}, 0 \right)$$

e raggio

$$\frac{M}{|1 - M^2|}$$



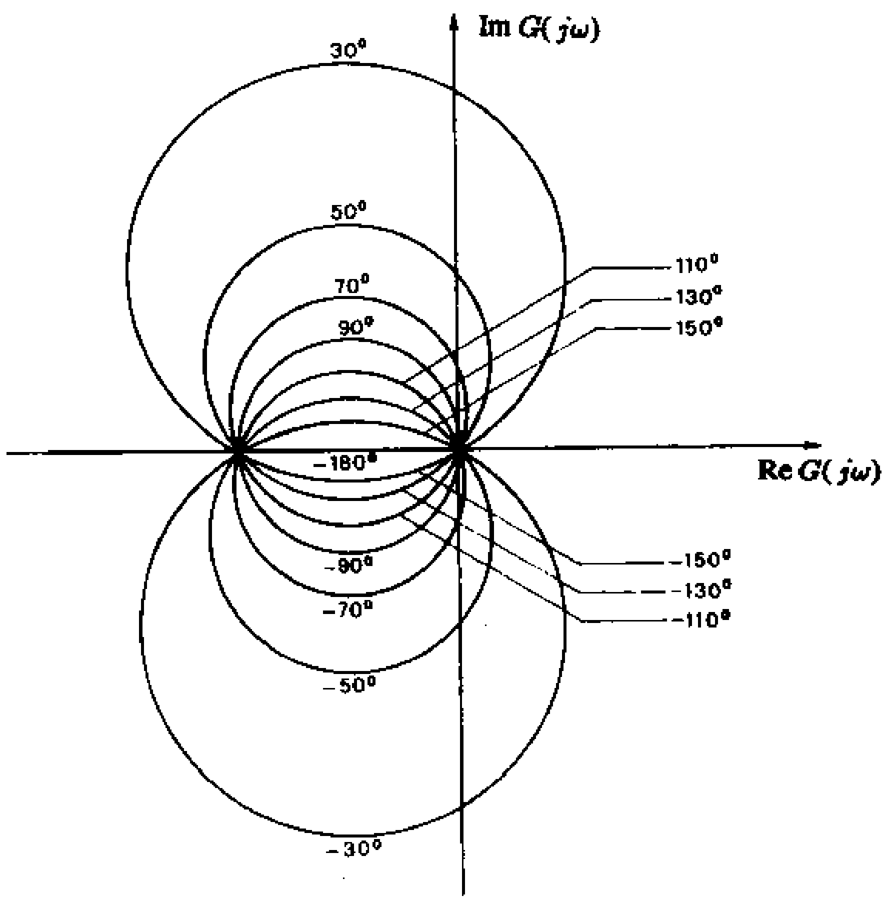
CIRCONFERENZE A FASE COSTANTE

- La semiretta $\arg W(j\omega) = \arctan N$ nel piano di W è trasformata nella circonferenza del piano di G di centro

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2N} \right)$$

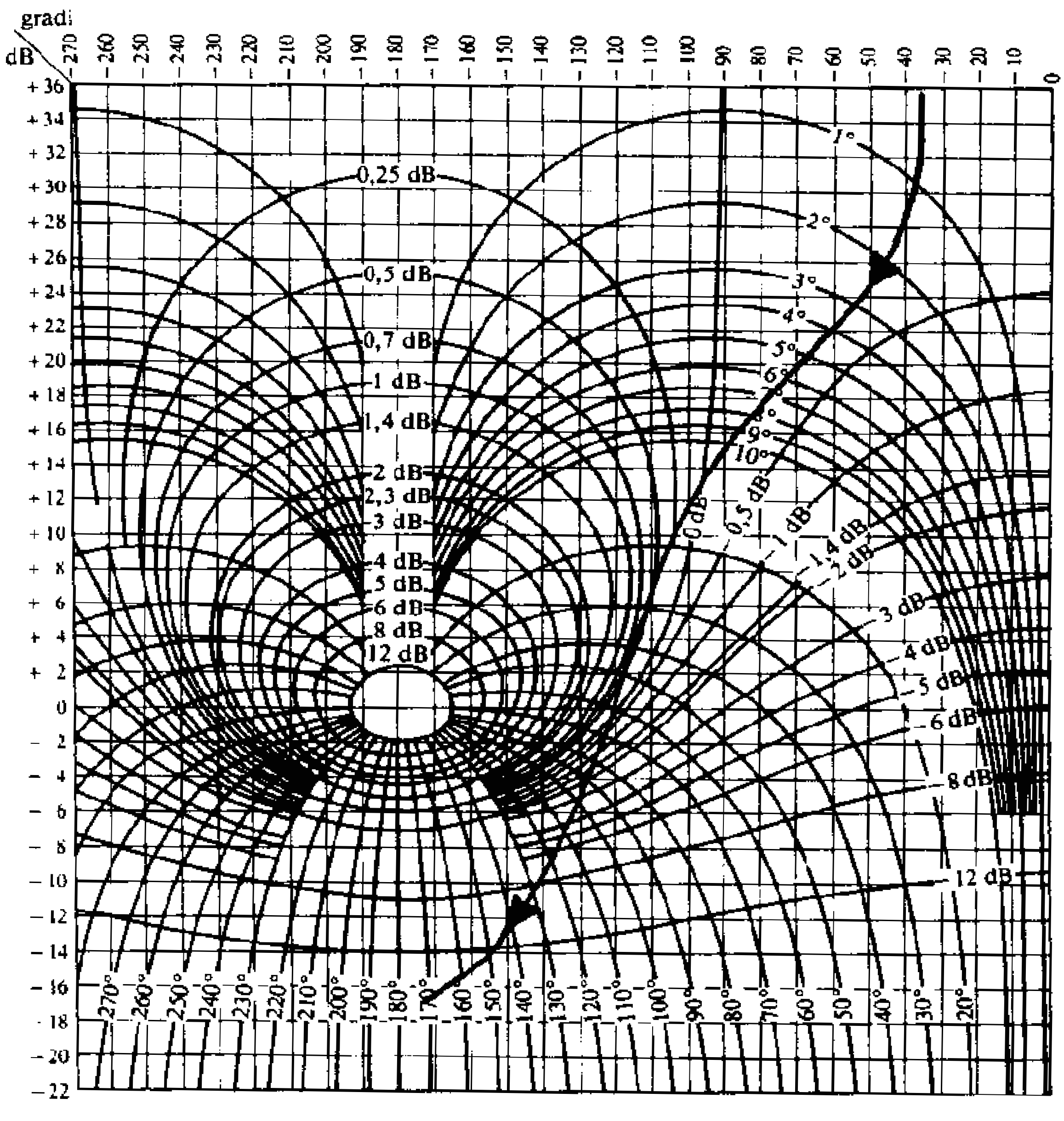
e raggio

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{N^2+1}{N^2}}$$



CARTA DI NICHOLS

- Passaggio dal diagramma di Nichols di $G(j\omega)$ a quello di $W(j\omega)$.

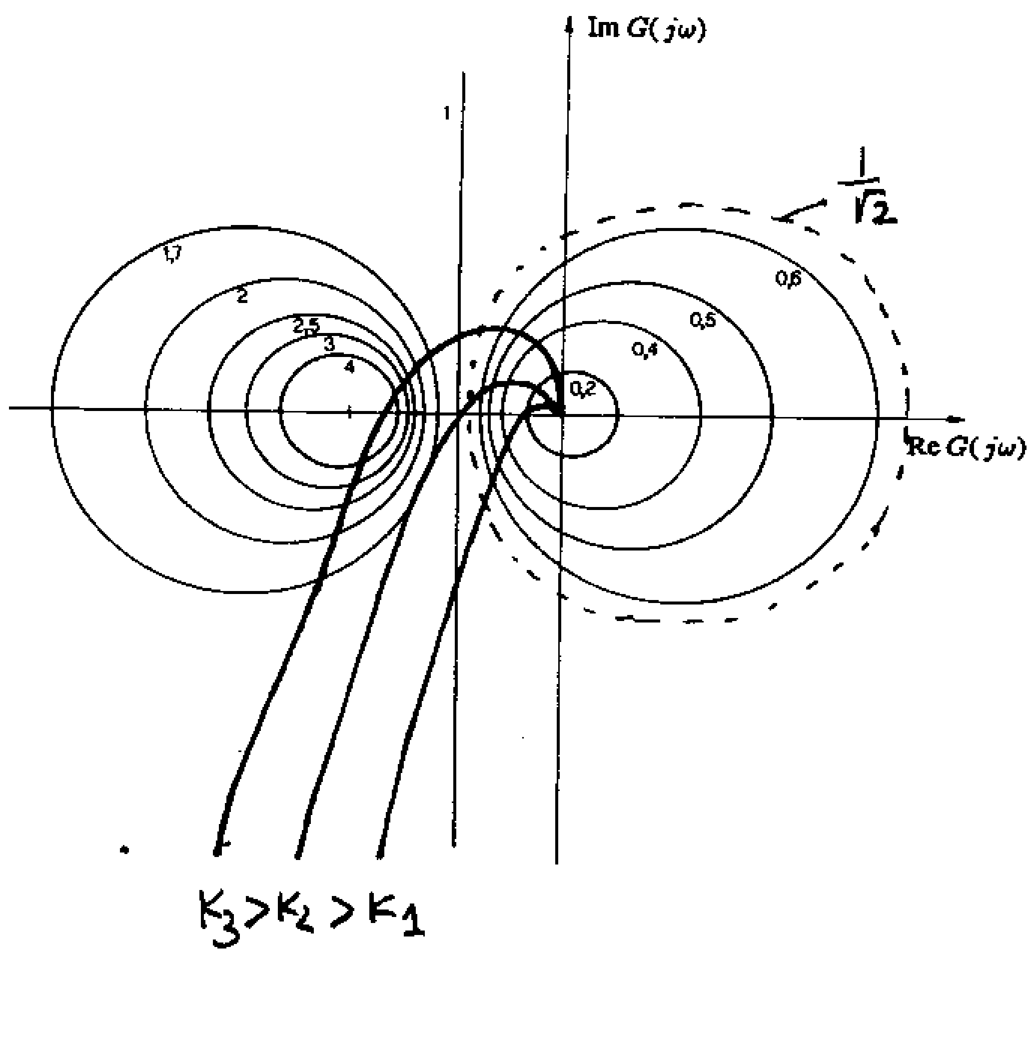


CARTA DI NICHOLS

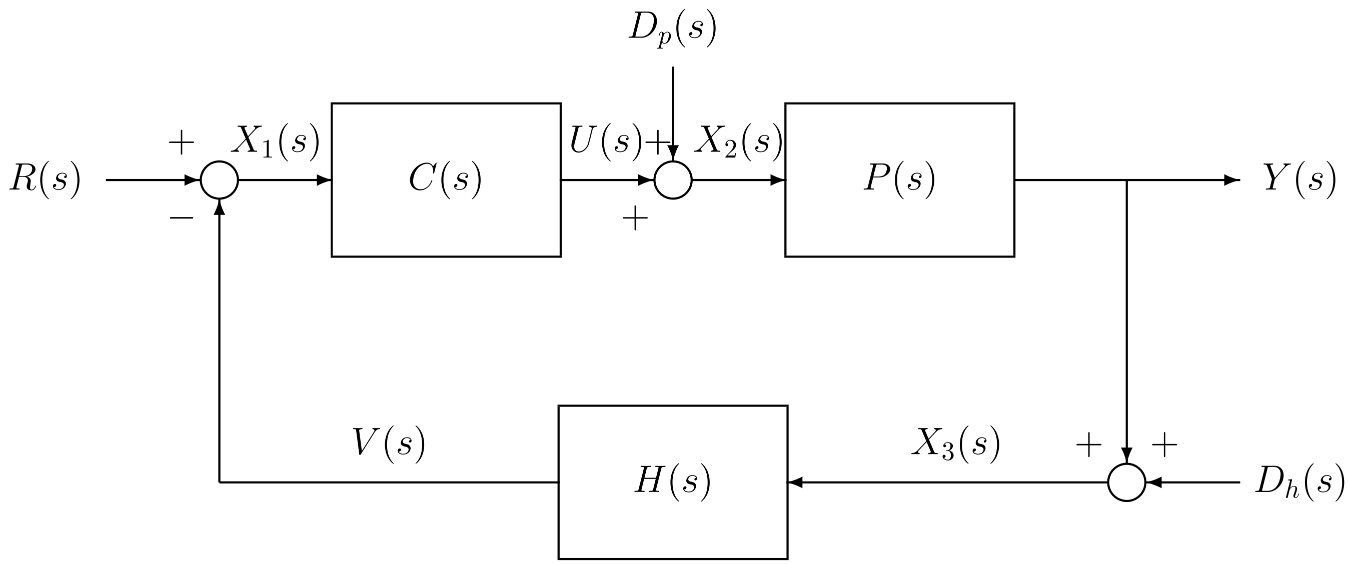
- Parametri caratteristici di $W(j\omega)$.

ESEMPIO DI UTILIZZO DEI LUOGHI A M E N COSTANTE

- Effetto del guadagno di Bode di $G(j\omega)$ sui parametri caratteristici di $W(j\omega)$



SISTEMI DI CONTROLLO IN RETROAZIONE: STABILITÀ



- Definizioni di stabilità interna del sistema di controllo in retroazione.

  – Il sistema si dice asintoticamente stabile internamente se ad ogni arbitraria perturbazione di durata finita dei tre ingressi $r(t)$, $d_p(t)$ e $d_h(t)$ corrisponde una risposta asintoticamente stabile in ogni punto del sistema di controllo.

  – Il sistema si dice ILUL stabile internamente se ad ogni terna di ingressi $r(t)$, $d_p(t)$, $d_h(t)$ limitati in ampiezza corrisponde una risposta limitata in ogni punto del sistema di controllo.

SISTEMI DI CONTROLLO IN RETROAZIONE: STABILITÀ

- Ipotesi semplificativa: $C(s)$, $P(s)$ e $H(s)$ sono funzioni razionali fratte (equivalenza delle due definizioni di stabilità interna).
  - Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità interna:
    * Le 9 funzioni di trasferimento riportate in tabella devono avere tutti i poli a parte reale minore di zero.

	$R(s)$	$D_p(s)$	$D_h(s)$
$V(s)$	$\frac{C(s)P(s)H(s)}{1+C(s)P(s)H(s)}$	$\frac{P(s)H(s)}{1+C(s)P(s)H(s)}$	$\frac{H(s)}{1+C(s)P(s)H(s)}$
$U(s)$	$\frac{C(s)}{1+C(s)P(s)H(s)}$	$-\frac{C(s)P(s)H(s)}{1+C(s)P(s)H(s)}$	$-\frac{C(s)H(s)}{1+C(s)P(s)H(s)}$
$Y(s)$	$\frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)H(s)}$	$\frac{P(s)}{1+C(s)P(s)H(s)}$	$-\frac{C(s)P(s)H(s)}{1+C(s)P(s)H(s)}$

- Estensione a sistemi di controllo più complessi.

SISTEMI DI CONTROLLO IN RETROAZIONE: STABILITÀ

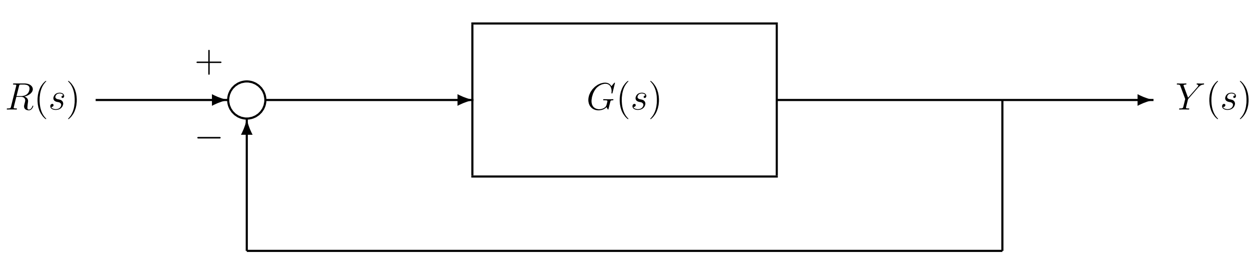
- Problema: esiste una condizione equivalente per la stabilità interna del sistema di controllo in retroazione?

- Risposta (I).

  - Il sistema di controllo in retroazione è internamente stabile se e solo se:

    1. la funzione di trasferimento $1 + C(s)P(s)H(s)$ non ha zeri con parte reale maggiore o uguale a zero;
    2. non ci sono cancellazioni polo-zero nel semipiano destro chiuso del piano complesso nel prodotto $C(s)P(s)H(s)$.

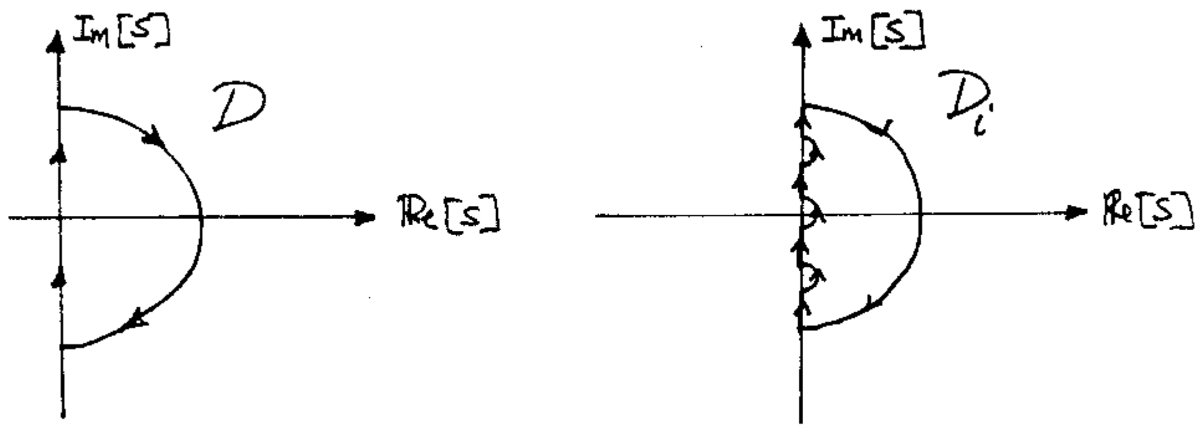
- Osservazione: è sufficiente studiare la configurazione a retroazione unitaria con $G(s) := C(s)P(s)H(s)$ tenendo conto degli eventuali poli a parte reale maggiore o uguale a zero di $C(s)$, $P(s)$ e $H(s)$.



CRITERIO DI NYQUIST

- Risposta (II).

  - Si consideri il diagramma di Nyquist di $G(s)$ esteso ai valori negativi della pulsazione ω tenendo conto delle eventuali singolarità sull'asse immaginario (percorso di Nyquist $\mathcal{D}$ e percorso di Nyquist indentato $\mathcal{D}_i$)



  - Sia $n_i(G)$ il numero di poli di $G(s)$ con parte reale maggiore di zero.

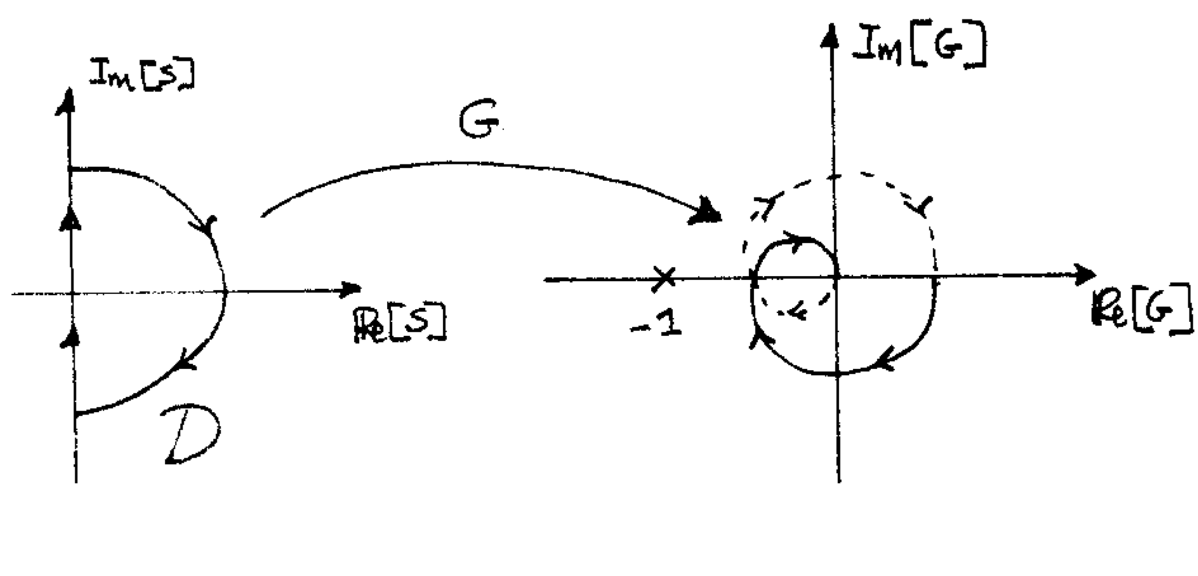
  - Criterio di Nyquist.

    * Il sistema di controllo a retroazione unitaria è internamente stabile se e solo se il diagramma esteso di Nyquist di $G(s)$ non passa per il punto $(-1, 0)$ e compie, intorno a questo punto, un numero di rotazioni antiorarie pari a $n_i(G)$.

DIMOSTRAZIONE CRITERIO DI NYQUIST

- Lemma di Cauchy (principio degli argomenti).
  - Sia $F(s)$ una funzione di trasferimento razionale fratta e Γ una curva chiusa nel piano complesso orientata in senso orario. Siano $z_i(F)$ e $p_i(F)$ rispettivamente il numero di zeri e di poli di $F(s)$ interni alla regione limitata del piano complesso definita da Γ. Se nessun polo o zero di $F(s)$ appartiene a Γ, allora $F(\Gamma)$ è una curva chiusa e limitata che non passa per l'origine e compie intorno all'origine un numero di rotazioni orarie pari a $z_i(F) - p_i(F)$

- La dimostrazione del criterio di Nyquist deriva dall'applicazione del principio degli argomenti ponendo:
  1. $F(s) = 1 + G(s)$
  2. $\Gamma = \mathcal{D}$



CONSIDERAZIONI SUL CRITERIO DI NYQUIST

- Schema a retroazione unitaria.
  - Sia $n_i(W)$ il numero dei poli a parte reale maggiore di zero della funzione di trasferimento ad anello chiuso $W(s)$. Allora, nelle ipotesi del criterio di Nyquist, vale:

$$n_i(W) \;=\; n_i(G) \;+\; N_{G,-1}$$

  - Se $n_i(G) = 0$ ($G(s)$ stabile), allora si parla di criterio di Nyquist ridotto.
  - Se $G(s)$ ha poli sull'asse immaginario, allora si deve usare il percorso indentato $\mathcal{D}_i$ richiudendo il diagramma esteso di Nyquist.
  - Se il diagramma di Nyquist di $G(s)$ passa per il punto $(-1, 0)$, allora $W(s)$ ha poli a parte reale nulla.

- Schema a retroazione non unitaria.
  - Detto $\hat{n}_i(1 + CPH)$ il numero di zeri a parte reale positiva di $1 + C(s)P(s)H(s)$, risulta:

$$\hat{n}_i(1 + CPH) \;=\; n_i(C) \;+\; n_i(P) \;+\; n_i(H) \;+\; N_{CPH,-1}$$

CRITERIO DI NYQUIST: ESEMPI DI APPLICAZIONE

- Sistemi del primo e del secondo ordine stabili

- Sistemi di ordine superiore al secondo stabili.

  - effetto delle variazioni del guadagno:

$$G(s) = \frac{K}{(1 + s\tau_0)(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

  - sistemi condizionatamente stabili:

$$G(s) = \frac{K(1 + s\tau_0)^2}{(1 + s\tau_1)^3}$$

- Sistemi con poli in zero:

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}; \quad G(s) = \frac{K}{s^2(1 + s\tau_1)}; \quad G(s) = \frac{K(1 + s\tau_0)}{s^2(1 + s\tau_1)}$$

- Sistemi instabili:

$$G(s) = \frac{K(1 + s\tau_0)}{(1 - s\tau_1)(1 - s\tau_2)}$$

MARGINI DI STABILITÀ : FASE E GUADAGNO

- Sistemi "comuni": la funzione di trasferimento $G(s)$, oltre a non avere poli e zeri a parte reale maggiore di zero, ha un andamento monotono decrescente del modulo $|G(j\omega)|$.

- Definizioni delle pulsazioni ω_a (pulsazione di attraversamento) e ω_π.
  - ω_a è la pulsazione alla quale il modulo di $G(j\omega)$ è unitario (è univocamente definita per i sistemi comuni);
  - ω_π è la pulsazione alla quale $G(j\omega)$ è reale ed ha minimo valore.

- Margine di fase:

$$m_\phi := \arg G(j\omega_a) + \pi$$

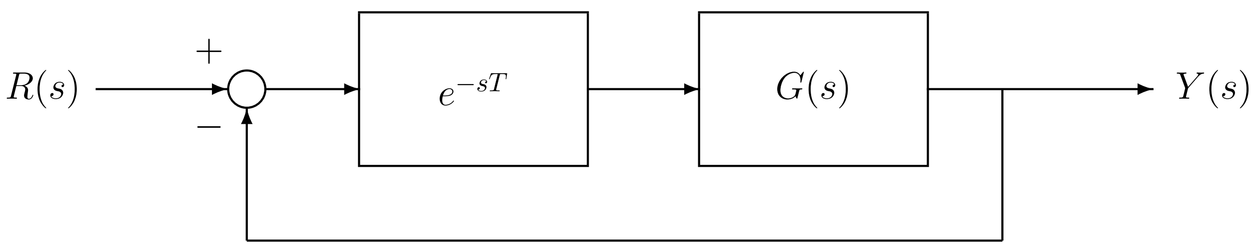
- Margine di guadagno:

$$m_g := \frac{1}{|G(j\omega_\pi)|}$$

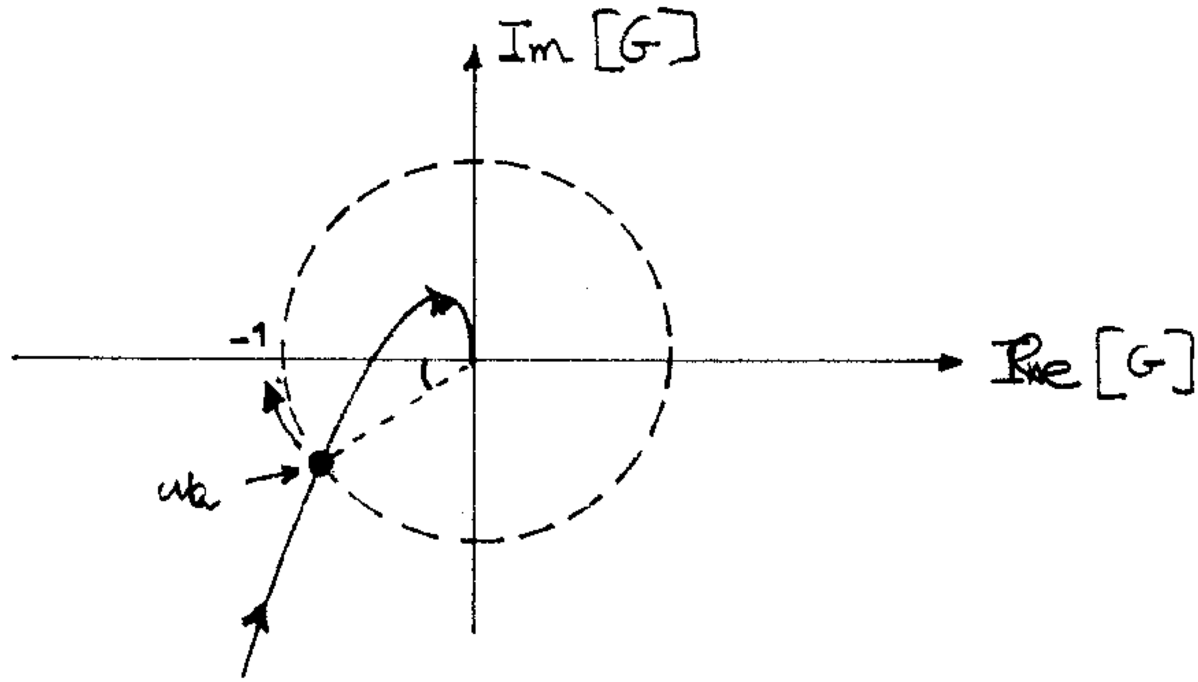
- Lettura dei margini di fase sui diagrammi di Bode, Nichols e Nyquist.

- Margini di stabilità per sistemi non comuni.

CRITERIO DI NYQUIST: SISTEMI CON RITARDO



- Ipotesi (I): $G(s)$ non ha poli a parte reale maggiore di zero.
- Ipotesi (II): se $T = 0$ (assenza di ritardo), allora il sistema ad anello chiuso non ha poli a parte reale maggiore di zero.
- Risultato: se $T > 0$, allora il sistema ad anello chiuso ha poli a parte reale maggiore di zero se il diagramma di Nyquist modificato compie delle rotazioni orarie intorno al punto $(-1, 0)$.

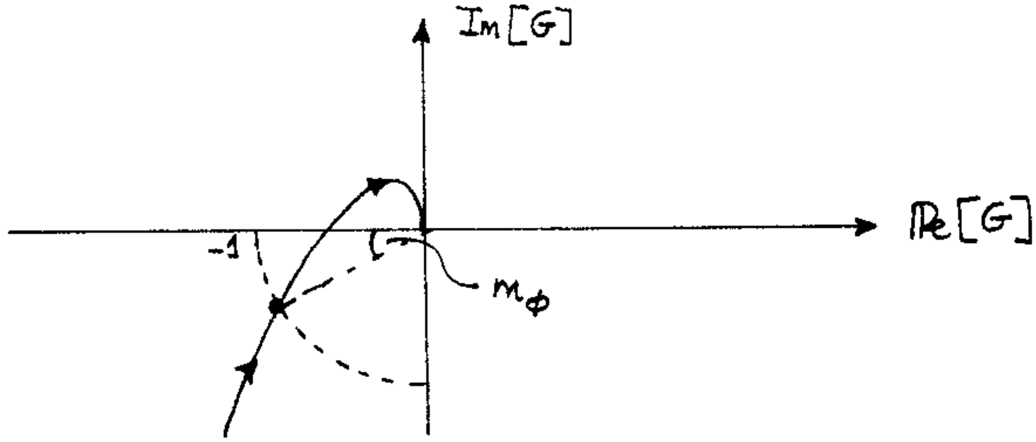


CRITERIO DI NYQUIST: SISTEMI CON RITARDO

- Ritardo critico T_c: è il minimo valore del ritardo T che fa perdere la stabilità al sistema ad anello chiuso.

$$T_c = \frac{m_\phi}{\omega_a} = \frac{\arg[G(j\omega_a)] + \pi}{\omega_a}$$

compie delle rotazioni orarie intorno al punto $(-1, 0)$.



- Relazione fra il guadagno di Bode K del guadagno d'anello $G(s)$ di un sistema comune e il ritardo critico T_c.