
Tecniche di progetto di controllori

(ver. 1.2)

In questo capitolo sarà descritta una tecnica di progetto classica di controllori denominata *sintesi per tentativi*. Abbiamo visto precedentemente come calcolare il valore del guadagno k_c del controllore e come fissare il tipo del sistema controllato. In questo capitolo analizzeremo come progettare la rimanente parte del controllore, che avevamo chiamato $C'(s)$. Affinché con la realizzazione di $C'(s)$ non vengano modificate le specifiche a regime permanente è necessario che tale funzione di trasferimento abbia guadagno unitario, cioè $C'(0) = 1$.

1.1 Determinazione delle specifiche ad anello aperto

Come abbiamo visto in precedenza, le specifiche di un sistema di controllo, oltre che sul regime permanente, possono essere relative al regime transitorio del sistema in anello chiuso. Dal momento che per la sintesi di un controllore con le tecniche che verranno descritte in seguito è necessario avere a disposizione delle specifiche sull'anello aperto del sistema controllato, risulta evidente la necessità di utilizzare le formule di conversione tra le specifiche riportate in precedenza.

In particolare, le due specifiche che risulteranno utili per la progettazione del controllore sono il margine di fase desiderato (ϕ_m) del sistema ad anello aperto e la frequenza (ω_c) alla quale il modulo del sistema (sempre ad anello aperto) dovrà attraversare l'asse 0 dB.

Di seguito sono riportate alcune delle formule di conversione:

$$\phi_m \simeq \frac{2.3 - M_r}{1.25} \quad \text{dove } M_r \text{ è espresso in scala assoluta (e non in dB) e } \phi_m \text{ in radianti;}$$

$$\omega_c \simeq (0.5 \div 0.8) B_w$$

$$M_r \simeq \frac{1 + \hat{s}}{[0.85 \div 1]} \quad \text{dove } M_r \text{ e } \hat{s} \text{ sono espressi in scala assoluta;}$$

$$T_s B_w \simeq 3$$

$$\phi_m \simeq 100 \zeta.$$

Una volta determinato il margine di fase e la frequenza di attraversamento desiderata, si renderà necessario progettare un controllore che soddisfi tali specifiche. A tal fine si utilizzeranno reti a banda derivativa, integrativa o miste.

Osservazione: poiché le relazioni riportate in precedenza sono approssimate, non è garantito che un controllore che soddisfi le specifiche su ϕ_m e ω_c sia effettivamente in grado di soddisfare le specifiche originarie. Nel caso in cui questo non accada sarà necessario ripetere il procedimento di sintesi variando ϕ_m e ω_c in modo opportuno (da qui il nome di “sintesi per tentativi”).

1.2 Reti a banda derivativa

Una *rete a banda derivativa* (o *rete anticipatrice*) viene utilizzata per anticipare la fase ed allargare la banda del sistema. La funzione di trasferimento di una rete a banda derivativa è la seguente:

$$C_D(s) = \frac{1 + s\tau}{1 + \frac{\tau}{m}s} \quad \text{dove } \frac{1}{m} \triangleq \alpha < 1.$$

Lo zero ed il polo della rete valgono:

$$z = -\frac{1}{\tau}, \quad p = -\frac{m}{\tau} = -\frac{1}{\alpha\tau},$$

e la loro posizione nel piano complesso è illustrata in Fig. 1.1, mentre il diagramma di Bode della rete è riportato in Fig. 1.2.

Dal diagramma di Bode si deduce che questo tipo di rete opera come un filtro passa alto, amplificando le alte frequenze a producendo un anticipo di fase. La frequenza alla quale

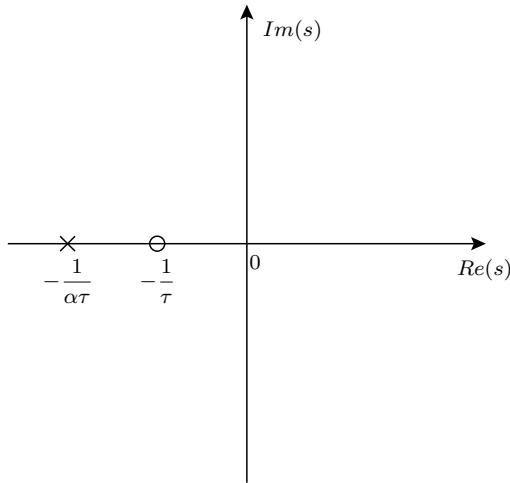
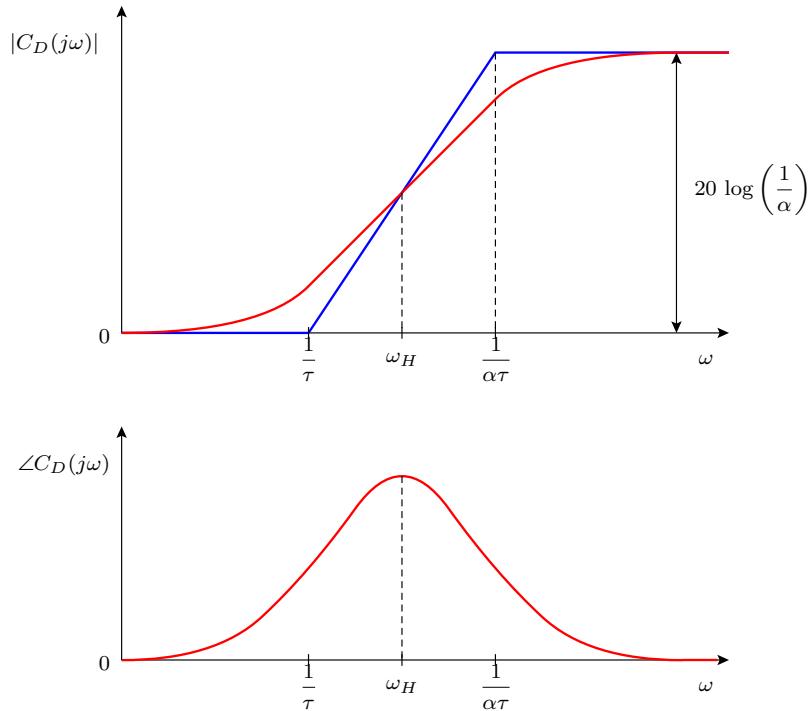


Figura 1.1: Posizione dello zero e del polo di una rete anticipatrice nel piano complesso.



si ha il massimo guadagno di fase è pari alla media geometrica tra la posizione del polo e dello zero, cioè:

$$\omega_H = \sqrt{\frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{\alpha\tau}} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}. \quad (1.1)$$

A tale risultato si giunge ponendo a zero la derivata della fase di $C_D(j\omega)$, cioè:

$$\frac{d}{d\omega} [\text{atan}(\omega\tau) - \text{atan}(\omega\alpha\tau)] = 0.$$

Ricordando che $\frac{d}{dx} \operatorname{atan}(x) = \frac{1}{1+x^2}$, si ottiene:

$$\frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2} - \frac{\tau\alpha}{1+\omega^2\tau^2\alpha^2} = 0,$$

che mediante semplici passaggi algebrici conduce alla soluzione.

Il massimo valore della fase risulta quindi pari a $\angle C_D(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_H}$.

Sostituendo il valore di ω_H e dopo opportuni passaggi algebrici si ottiene:

$$\phi_{max} = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{1-\sin \phi_{max}}{1+\sin \phi_{max}} \quad (1.2)$$

mentre il valore massimo del modulo è pari a:

$$\gamma_{max} = 20 \log \frac{1}{\alpha}.$$

Risulta quindi evidente dalla (1.2) che aumentando la distanza tra lo zero ed il polo (ovvero riducendo il valore di α), si avrà un aumento di fase fino al valore limite di $\frac{\pi}{2}$ (Fig. 1.3). A tale aumento di fase corrisponde però anche un aumento del modulo, che oltre certi limiti potrebbe risultare dannoso ai fini delle prestazioni del sistema. A tal fine, nel caso si voglia guadagnare molti gradi in fase (ad esempio più di 60°), è preferibile utilizzare più reti in cascata in modo da ottenere lo stesso guadagno di fase ma una minore amplificazione del modulo.

Mentre il valore di α agisce sul guadagno (di modulo e di fase) della rete, il valore di τ determina la posizione in frequenza dove la rete dovrà agire.

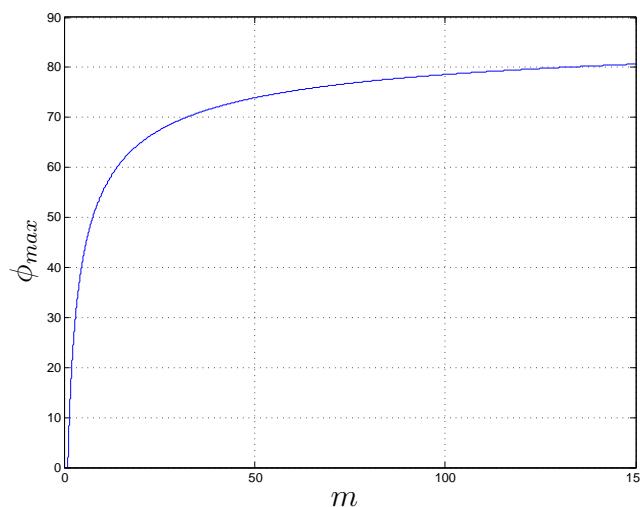


Figura 1.3: Massimo guadagno di fase al variare di $m = \frac{1}{\alpha}$.

Dal punto di vista circuitale, una rete anticipatrice può essere realizzata come illustrato in Fig. 1.4. La funzione di trasferimento di tale circuito risulta:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{1 + s C R_2}{1 + s C R_1}$$

dove i valori di $R_1 < R_2$ e C devono essere dimensionati in modo opportuno. Notare che tale rete risulta essere di tipo invertente (guadagno negativo).

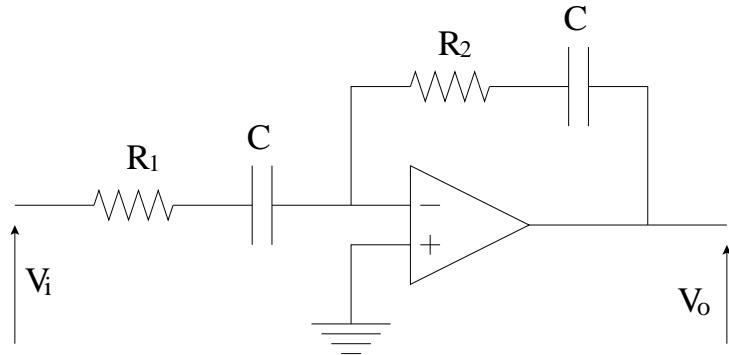


Figura 1.4: Circuito analogico che realizza una rete anticipatrice invertente.

Un metodo alternativo alle (1.1)-(1.2) per la determinazione dei parametri caratteristici di una rete anticipatrice è quello di utilizzare le *carte normalizzate di modulo e fase* (Fig. 1.5). Tali carte riportano, rispettivamente, il modulo e la fase di una rete anticipatrice al variare della frequenza normalizzata $\omega\tau$ calcolati per diversi valori di m . Una volta selezionato il valore desiderato di m ed $\omega\tau$, per ricavare la posizione dove piazzare la rete ($\bar{\tau}$), dovremo risolvere:

$$\omega_c \bar{\tau} = \omega\tau \quad \longrightarrow \quad \bar{\tau} = \frac{\omega\tau}{\omega_c}$$

dove ω_c denota il valore della frequenza di attraversamento desiderata.

La rete derivativa risulterà quindi:

$$C_D(s) = \frac{1 + \bar{\tau} s}{1 + \frac{\bar{\tau}}{m} s} = \frac{1 + \frac{\omega\tau}{\omega_c} s}{1 + \frac{\omega\tau}{\omega_c m} s}.$$

1.3 Reti a banda integrativa

Una *rete a banda integrativa* (o *rete ritardatrice*) viene utilizzata per ridurre il modulo del sistema alle alte frequenze, mantenendo invariato il guadagno in continua. Tale operazione

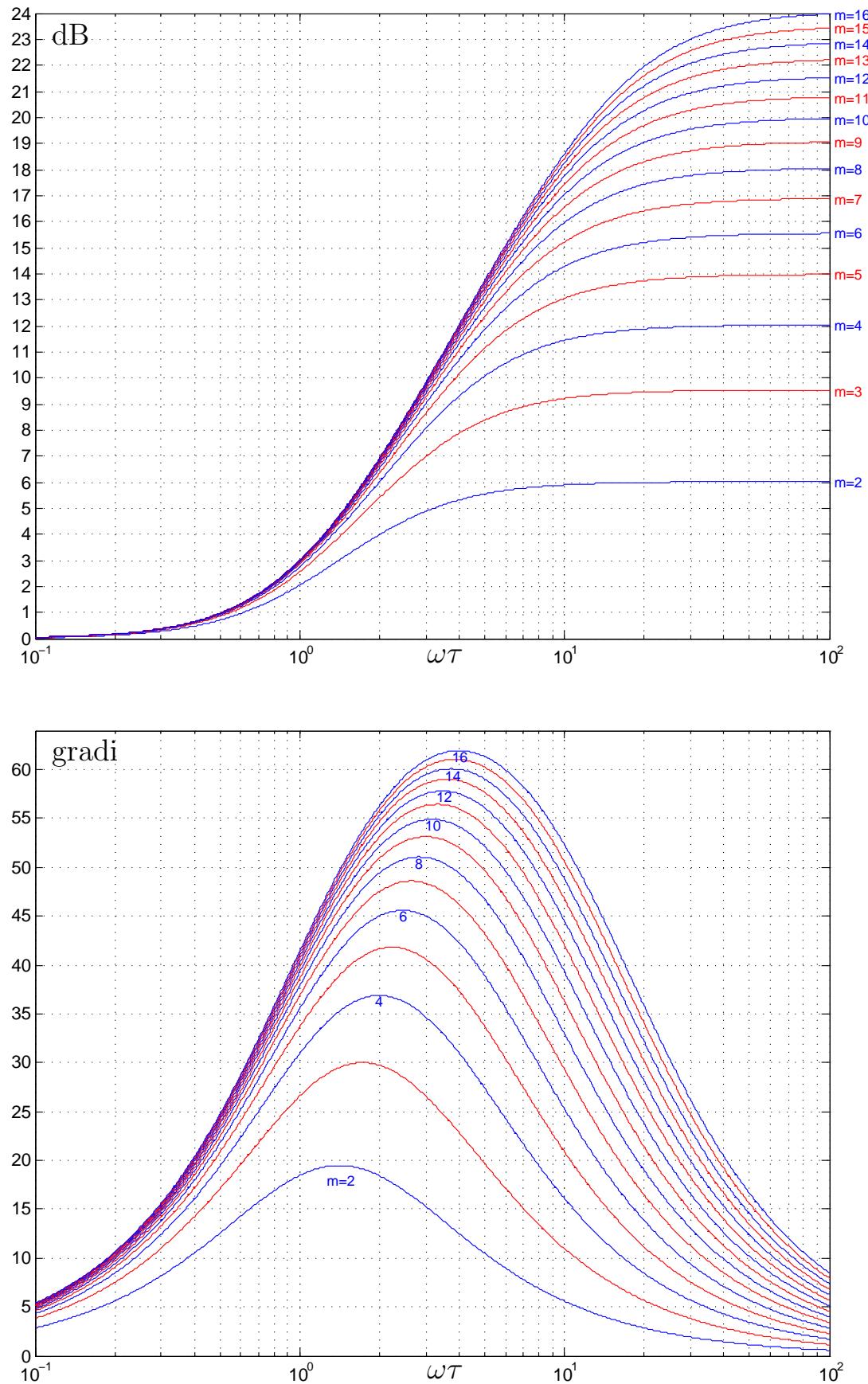


Figura 1.5: Carte normalizzate di modulo e fase.

tenderà a diminuire la banda del sistema. La funzione di trasferimento di una rete a banda integrativa è la seguente:

$$C_I(s) = \frac{1 + \frac{\tau}{m}s}{1 + s\tau} \quad \text{dove } \frac{1}{m} \triangleq \alpha < 1.$$

Lo zero ed il polo della rete valgono:

$$z = -\frac{m}{\tau} = -\frac{1}{\alpha\tau} \quad , \quad p = -\frac{1}{\tau},$$

e la loro posizione nel piano complesso è illustrata in Fig. 1.6, mentre il diagramma di Bode della rete è riportato in Fig. 1.7.

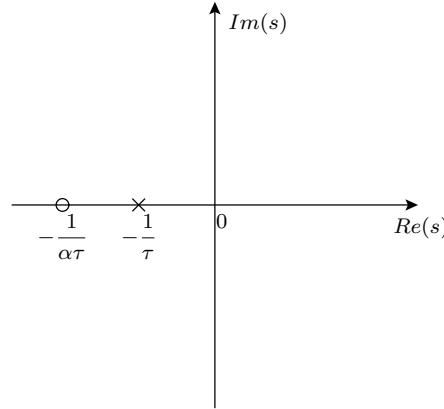


Figura 1.6: Posizione dello zero e del polo di una rete ritardatrice nel piano complesso.

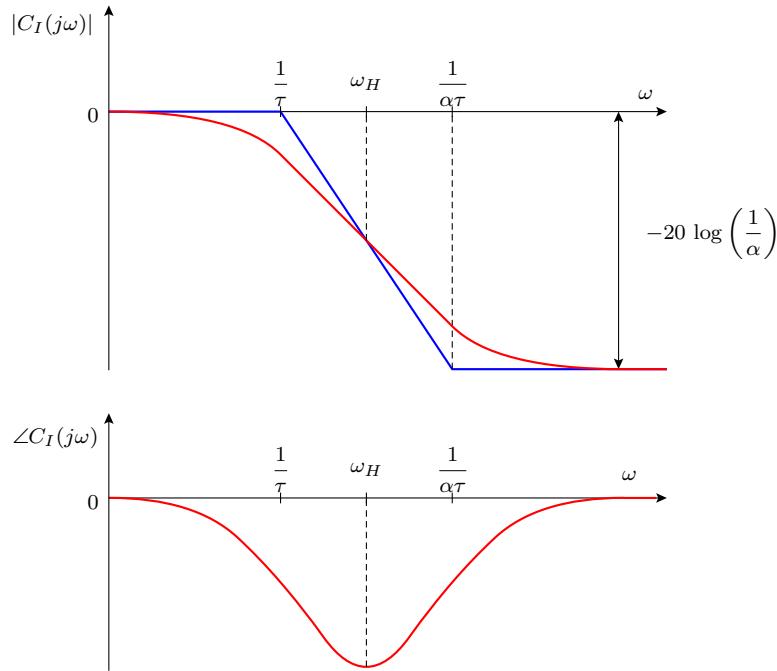


Figura 1.7: Diagramma di Bode di una rete ritardatrice.

Dal diagramma di Bode si deduce che questo tipo di rete opera come un filtro passa basso, attenuando le alte frequenze a producendo un ritardo di fase. La frequenza alla quale si ha la massima perdita di fase è pari alla media geometrica tra la posizione del polo e dello zero, cioè:

$$\omega_H = \sqrt{\frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{\alpha \tau}} = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}.$$

La massima perdita di fase risulta:

$$\phi_{min} = -\arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

mentre il valore minimo del modulo è pari a:

$$\gamma_{min} = -20 \log \frac{1}{\alpha}. \quad (1.3)$$

Poiché tale rete viene solitamente utilizzata per ridurre il modulo del sistema attenuando la fase il meno possibile, si usa scegliere un valore di τ in modo tale che il polo e lo zero si trovino sufficientemente a sinistra della frequenza di attraversamento desiderata. Una possibile scelta può essere quella di posizionare il polo due decadi a sinistra rispetto alla frequenza ω_c .

Osservazione: un posizionamento della rete ritardatrice a frequenze troppo basse può produrre il cosiddetto *effetto coda* (Fig. 1.8), ovvero la risposta del sistema può impiegare un tempo lungo per assestarsi al suo valore di regime. Questo è dovuto al fatto che un polo ad anello chiuso si trova in prossimità dell'asse immaginario.

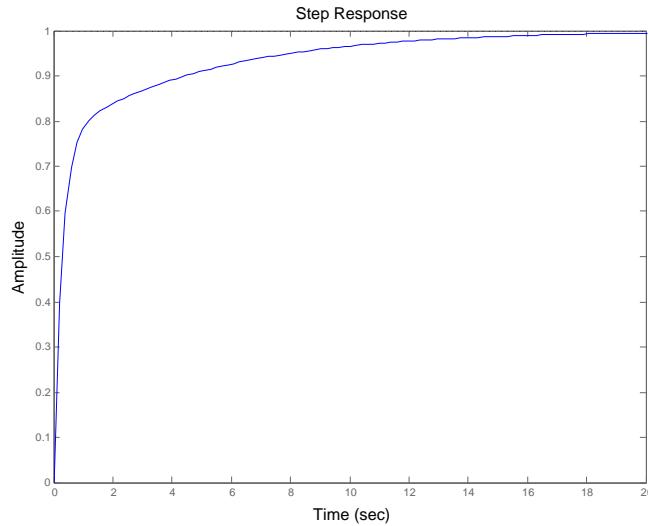


Figura 1.8: Effetto coda.

Dal punto di vista circuitale, una rete ritardatrice può essere realizzata allo stesso modo di una anticipatrice (Fig. 1.4) con la sola differenza che in questo caso dovrà essere $R_1 > R_2$.

Esempio 1.1

Sia dato il sistema riportato in Fig. 1.9 dove

$$G(s) = \frac{1}{s(1+0.1s)(1+0.2s)}.$$

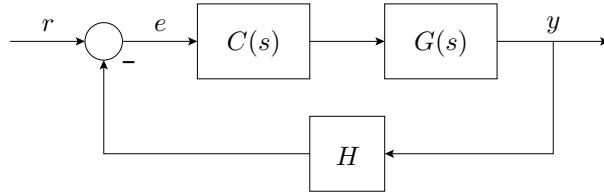


Figura 1.9: Sistema di controllo in retroazione dell'esempio 1.1.

Vogliamo determinare i valori di $C(s)$ e H in modo tale che siano soddisfatte le seguenti specifiche:

1. Rapporto ingresso-uscita $y/r = 1$.
2. Errore di inseguimento alla rampa lineare a regime $e_r \leq \frac{1}{30}$.
3. Picco di risonanza $M_r \leq 3$ dB.
4. Banda passante $B_w \geq 12$ rad/s.

Affinché sia soddisfatta la 1) è necessario che $H = 1$, e che quindi il sistema sia in retroazione unitaria.

Vogliamo adesso progettare un controllore della forma $C(s) = \frac{k_c}{s^h} C'(s)$ con $C'(0) = 1$.

Poiché la 2) richiede un errore di inseguimento alla rampa finito, significa che il sistema deve essere di tipo 1. Poiché la $G(s)$ è già di tipo 1, non sarà necessario aggiungere un polo nell'origine al controllore ($h = 0$). Per la determinazione del valore k_c è sufficiente ricordare che:

$$e_r = \frac{k_d^2}{k_g k_c}.$$

Essendo $k_c = 1$ e $k_g = 1$, la 2) sarà soddisfatta $\forall k_c: k_c \geq 30$: fissiamo quindi $k_c = 30$.

Rimane adesso da determinare la funzione di trasferimento $C'(s)$. Innanzitutto trasformiamo le specifiche richieste nei corrispondenti valori di ϕ_m e ω_c .

$$M_r = 3 \text{ dB} = 1.41 \quad \longrightarrow \quad \phi_m = \frac{2.3 - M_r}{1.25} = 0.71 \text{ rad} \simeq 41^\circ$$

$$\omega_c = [0.5 \div 0.8] B_w \quad \longrightarrow \quad \omega_c = [6 \div 9.6]. \quad Fissiamo \omega_c = 8 \text{ rad/s}.$$

Il diagramma di Bode della funzione $\bar{G}(s) = k_c G(s)$ è riportato in Fig. 1.10. Da tale diagramma si può osservare che alla pulsazione di 8 rad/s il modulo vale circa 3.8 dB e la fase -18°.

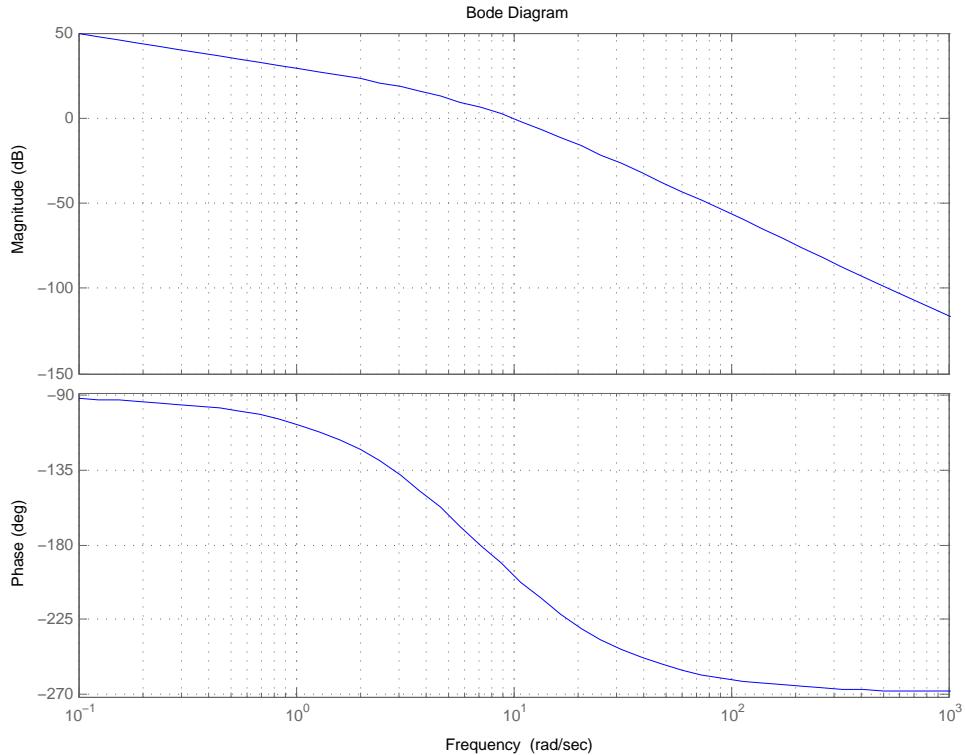


Figura 1.10: Diagramma di Bode del sistema non controllato $\bar{G}(j\omega)$.

Dovremo quindi aumentare la fase di $\Delta\phi_m = (7 + 41 + \varepsilon)$ gradi ed abbassare il modulo di 3.8 decibel. Risulta quindi necessario l'uso sia di una rete anticipatrice che di una ritardatrice. Per semplicità si è soliti progettare per prima la rete anticipatrice. Sarà opportuno abbondare sul valore di ε poiché questa rete sarà posta in cascata ad una ritardatrice che produrrà una piccola diminuzione di fase. Fissiamo quindi:

$$\Delta\phi_m = 7 + 41 + \varepsilon = 55^\circ.$$

Dalla (1.2) risulta che:

$$\alpha = \frac{1 - \sin 55}{1 + \sin 55} \simeq 0.1 \quad \longrightarrow \quad m = 10.$$

Poiché vogliamo centrare questa rete alla frequenza ω_c risulterà:

$$\frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}} = \omega_c \quad \longrightarrow \quad \tau = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\alpha}} \simeq 0.4 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} z = -\frac{1}{\tau} \simeq -2.5 \text{ rad/s} \\ p = -\frac{1}{\alpha\tau} \simeq -25 \text{ rad/s}. \end{cases}$$

La rete anticipatrice sarà quindi:

$$C_a(s) = \frac{1 + 0.4s}{1 + 0.04s}.$$

Il diagramma di Bode della funzione $\bar{G}(s)$ in cascata con la rete anticipatrice $C_a(s)$ è riportato in Fig. 1.11.

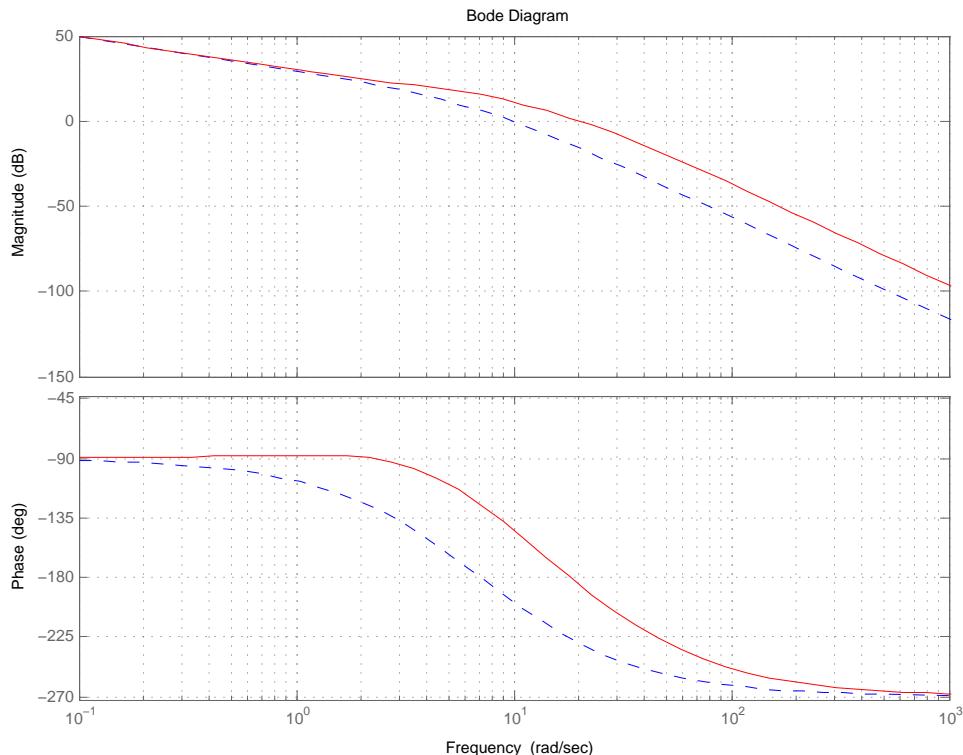


Figura 1.11: Diagramma di Bode del sistema $\bar{G}(j\omega)$ (--) e di $\bar{G}(j\omega)C_a(j\omega)$ (-).

Alla frequenza $\omega_c = 8$ rad/s risulta che il modulo vale 13.9 dB e la fase -132°.

Vogliamo adesso ridurre il modulo di 13.9 dB riducendo il meno possibile la fase. Utilizzeremo una rete integrativa centrata ad una bassa frequenza minore della banda del controllo, e tale che la massima riduzione in modulo sia pari a 13.9 dB. Per la (1.3) si ha:

$$\gamma_{min} = -20 \log \frac{1}{\alpha} = -13.9 \quad \longrightarrow \quad \alpha = 10^{-\frac{13.9}{20}} \simeq 0.2.$$

Adesso è necessario determinare il valore di τ . Possiamo scegliere τ in modo tale che il polo sia posizionato due decadi a sinistra rispetto al valore di ω_c . Questo garantisce in generale che la variazione di fase della rete ritardatrice alla frequenza ω_c sia piccola

($< 10^\circ$). Quindi:

$$\begin{cases} p = -\frac{1}{\tau} = -\omega_c/100 = -0.08 \text{ rad/s} \\ z = -\frac{1}{\alpha\tau} = -0.4 \text{ rad/s}. \end{cases}$$

La rete ritardatrice risulterà:

$$C_r(s) = \frac{1 + 2.5 s}{1 + 12.5 s}$$

mentre il controllore finale sarà:

$$C(s) = k_c C_a(s) C_r(s).$$

Il diagramma di Bode della funzione controllata è riportato in Fig. 1.12. Da tale diagramma è possibile verificare che $\phi_m \simeq 46^\circ$ e $\omega_c \simeq 7.95 \text{ rad/s}$. Questo significa che le specifiche ad anello aperto sono state soddisfatte, ma non garantisce che anche le specifiche di partenza lo siano. A tal fine è necessario valutare il picco di risonanza e la banda passante del sistema ad anello chiuso. Possiamo quindi tracciare il diagramma di Nichols (Fig. 1.13) e valutare i valori di picco di risonanza e banda passante. In questo caso, il picco di risonanza risulta minore di 3 dB (il diagramma è esterno alla curva a 3 dB), mentre la banda passante è circa 13.8 rad/s. Possiamo quindi concludere che il controllore progettato soddisfa le specifiche richieste.

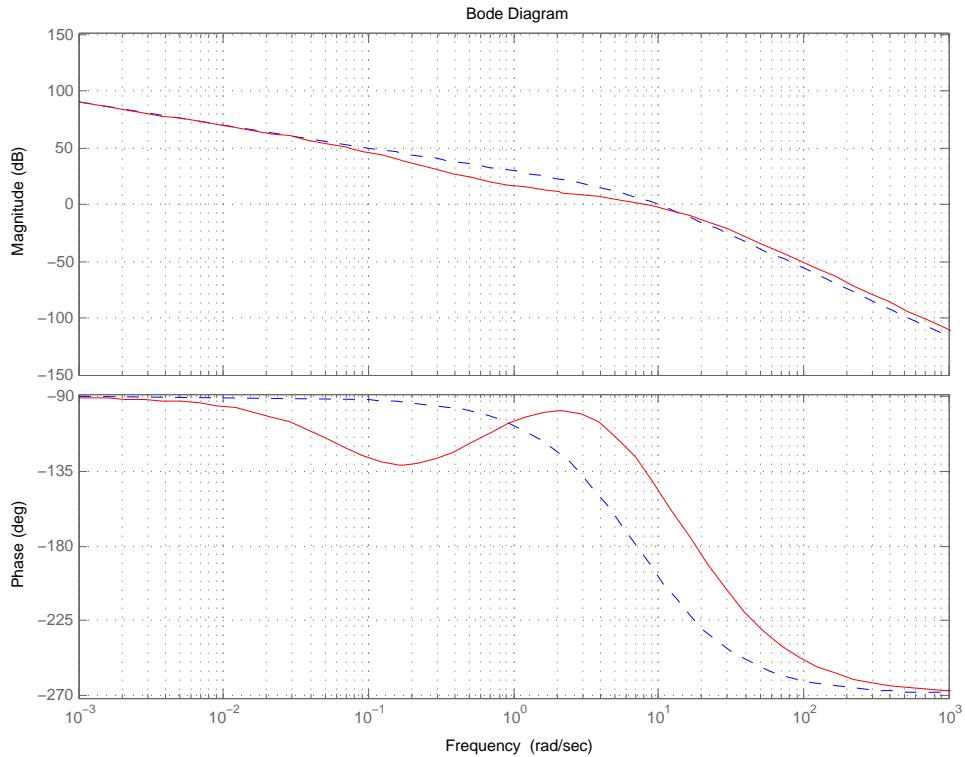


Figura 1.12: Diagramma di Bode del sistema $\bar{G}(j\omega)$ (—) e di $\bar{G}(j\omega) C_a(j\omega) C_r(j\omega)$ (-).

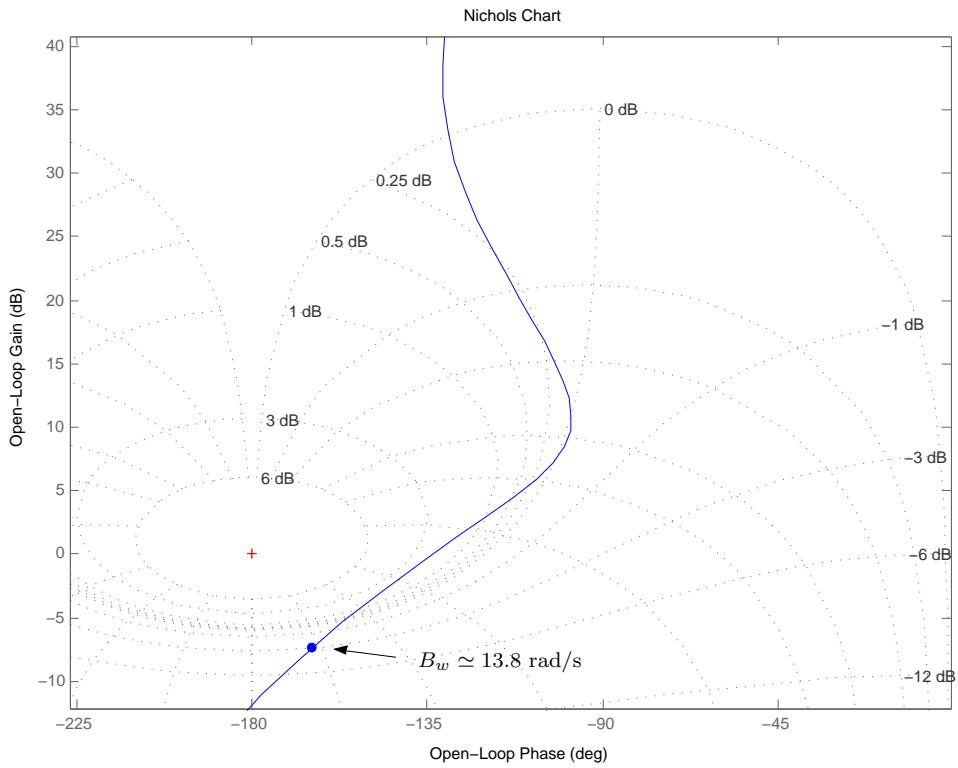


Figura 1.13: Diagramma di Nichols del sistema $G(j\omega)C(j\omega)$.

Esempio 1.2

Sia dato il sistema riportato in Fig. 1.14.

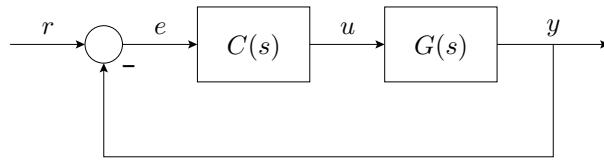


Figura 1.14: Sistema di controllo in retroazione dell'esempio 1.2.

Sia $T_{ru}(s)$ la funzione di trasferimento tra il riferimento ed il comando, cioè:

$$T_{ru}(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)}.$$

Una possibile richiesta può essere quella di voler limitare il valore del modulo di $T_{ru}(j\omega)$ oltre una certa frequenza, ovvero:

$$|T_{ru}(j\omega)| \leq \delta \quad , \quad \forall \omega \geq \bar{\omega}. \quad (1.4)$$

Solitamente $\bar{\omega}$ è situato alle alte frequenze, dove vale $|C(j\omega)G(j\omega)| \ll 1$, $\forall \omega \geq \bar{\omega}$.

Avremo quindi:

$$|T_{ru}(j\omega)| \simeq |C(j\omega)| \quad , \quad \forall \omega \geq \bar{\omega}.$$

Supponiamo di aver progettato un controllore mediante una rete anticipatrice ed una ritardatrice, cioè:

$$C(s) = k_c \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \frac{1 + \beta t s}{1 + t s} \quad , \quad \alpha, \beta < 1.$$

Per valori di ω sufficientemente grandi (ad esempio $\omega \geq \bar{\omega}$) vale:

$$T_{ru}(j\omega) \simeq \lim_{\omega \rightarrow \infty} |T_{ru}(j\omega)| \simeq \lim_{\omega \rightarrow \infty} |C(j\omega)| = k_c \frac{\beta}{\alpha}.$$

Affinché la (1.4) sia soddisfatta dovrà quindi valere:

$$k_c \frac{\beta}{\alpha} \leq \delta. \quad (1.5)$$

Risulta quindi immediato che la (1.5) rappresenta un ulteriore vincolo da tenere in considerazione durante la progettazione della rete di controllo.