
Prestazioni dei sistemi in retroazione

(ver. 1.2)

1.1 Sensitività e sensitività complementare

Sia dato il sistema in retroazione riportato in Fig. 1.1. Vogliamo determinare quanto è sensibile il sistema in anello chiuso a fronte di variazioni della funzione $G(s)$. Questa analisi risulta utile in quanto, dal punto di vista pratico, non avremo mai una conoscenza esatta del sistema $G(s)$. E' quindi desiderabile che il sistema ad anello chiuso sia piuttosto insensibile alle variazioni della $G(s)$. La sensitività relativa alla funzione di anello chiuso $T = G/(1 + G)$ rispetto alla funzione di anello aperto G è data da:

$$\frac{\frac{\partial T}{\partial G}}{T} = \frac{1 + G - G}{(1 + G)^2} \cdot \frac{1}{\frac{G}{1+G} \frac{1}{G}} = \frac{1 + G}{(1 + G)^2} = \frac{1}{1 + G} \triangleq S(s).$$

La funzione $S(s)$ si dice *funzione di sensitività*. La funzione di anello $T(s)$ introdotta prima si chiama *sensitività complementare* poiché:

$$T(s) \triangleq \frac{G(s)}{1 + G(s)} = 1 - S(s).$$

Conoscendo l'andamento di $|G(j\omega)|$ sarà quindi possibile determinare $|S(j\omega)|$ e $|T(j\omega)|$. In generale, supponendo di avere una funzione $G(s)$ strettamente propria, si può verificare che:

$$|T(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)|} \simeq \begin{cases} 0 \text{ dB} & , \quad \forall \omega: |G(j\omega)| \gg 1 \\ |G(j\omega)|_{dB} & , \quad \forall \omega: |G(j\omega)| \ll 1. \end{cases}$$

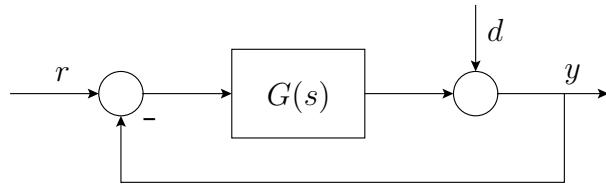


Figura 1.1: Sistema in retroazione unitaria.

Un ragionamento analogo può essere esteso al caso di $S(s)$:

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + G(j\omega)|} = \begin{cases} -|G(j\omega)|_{dB} & , \quad \forall \omega: |G(j\omega)| \gg 1 \\ 0 \text{ dB} & , \quad \forall \omega: |G(j\omega)| \ll 1. \end{cases}$$

In Fig. 1.2 sono rappresentati gli andamenti tipici delle funzioni $S(s)$ e $T(s)$.

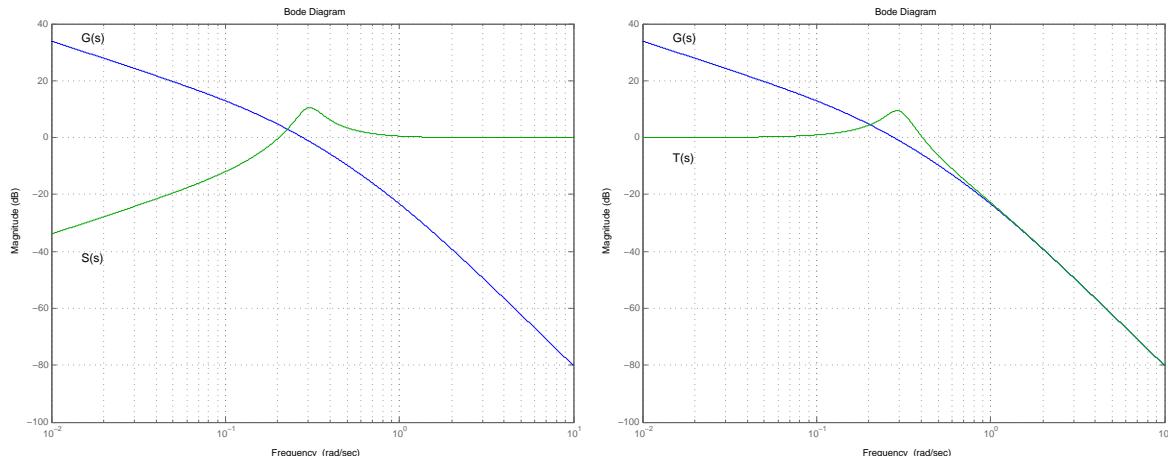


Figura 1.2: Andamenti delle funzioni $G(s)$, $S(s)$ e $T(s)$.

Si definisce come *picco di risonanza* M_r la differenza tra il massimo valore raggiunto dal modulo di $T(j\omega)$ ed il valore di regime. In generale, si desidera avere un picco di risonanza abbastanza piccolo, in quanto tanto maggiore è il picco e tanto minore risulterà essere lo smorzamento della risposta del sistema.

Si definisce *banda passante* B_w (o B_3) del sistema la frequenza alla quale il modulo di $T(j\omega)$ si riduce di 3 dB rispetto al valore di regime. Un aumento della banda passante si traduce generalmente in un aumento della prontezza di risposta del sistema.

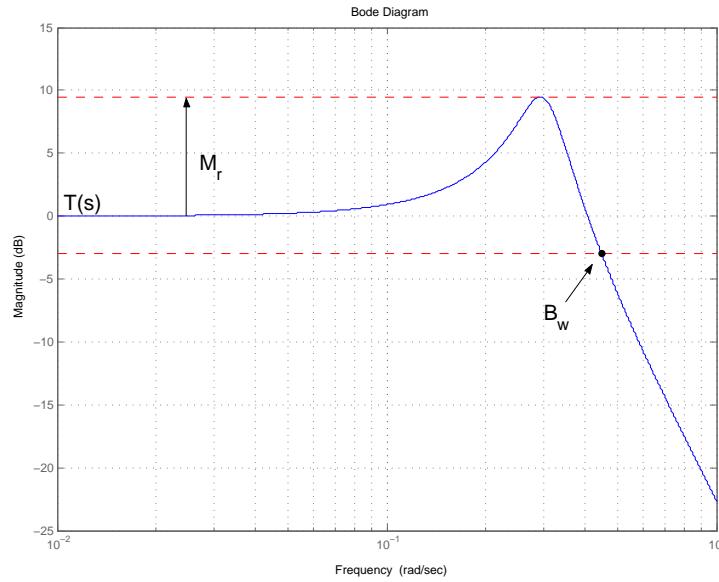


Figura 1.3: Picco di risonanza e banda passante di un sistema in retroazione.

I cerchi M

Vogliamo adesso determinare per quali punti del piano $X - Y$ il modulo della funzione ad anello chiuso $T(j\omega)$ risulta costante. Scriviamo $G(j\omega)$ mettendo in evidenza la parte reale ed immaginaria.

$$G(j\omega) = x(\omega) + j y(\omega).$$

Per semplificare la trattazione, nel seguito si ometterà la dipendenza da ω . La funzione ad anello chiuso risulterà:

$$T = \frac{G}{1+G} = \frac{x + jy}{(1+x) + jy}$$

e quindi:

$$|T|^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2} \triangleq M^2$$

da cui:

$$\begin{aligned} M^2(1 + 2x + x^2) + M^2y^2 &= x^2 + y^2 \\ (M^2 - 1)x^2 + 2M^2x + (M^2 - 1)y^2 + M^2 &= 0 \end{aligned}$$

Supponendo $M \neq 1$, dividendo per $(M^2 - 1)$ e sommando e sottraendo $\frac{M^4}{(M^2 - 1)^2}$, si ottiene:

$$x^2 + 2x \frac{M^2}{M^2 - 1} + \frac{M^4}{(M^2 - 1)^2} - \frac{M^4}{(M^2 - 1)^2} + y^2 + \frac{M^2}{M^2 - 1} = 0$$

che equivale a scrivere:

$$\left(x - \frac{M^2}{1 - M^2} \right)^2 + y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2}. \quad (1.1)$$

La (1.1) è l'equazione di una famiglia di circonferenze, il cui centro C e raggio R valgono:

$$C = \left(\frac{M^2}{1 - M^2}, 0 \right) \quad , \quad R = \frac{M}{|M^2 - 1|}.$$

Queste circonferenze vengono dette *cerchi M*. Sarà possibile tracciare il diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ su un apposita carta graduata con tali cerchi; in questo modo sarà possibile valutare il valore del modulo di $T(j\omega)$ a partire dal grafico di $G(j\omega)$ (Fig. 1.4). Sarà quindi particolarmente semplice dedurre il valore del picco di risonanza e della banda passante. Il picco di risonanza sarà infatti il valore del cerchio tangente al diagramma, mentre la banda passante sarà il valore della frequenza alla quale la curva interseca il cerchio corrispondente a -3 dB.

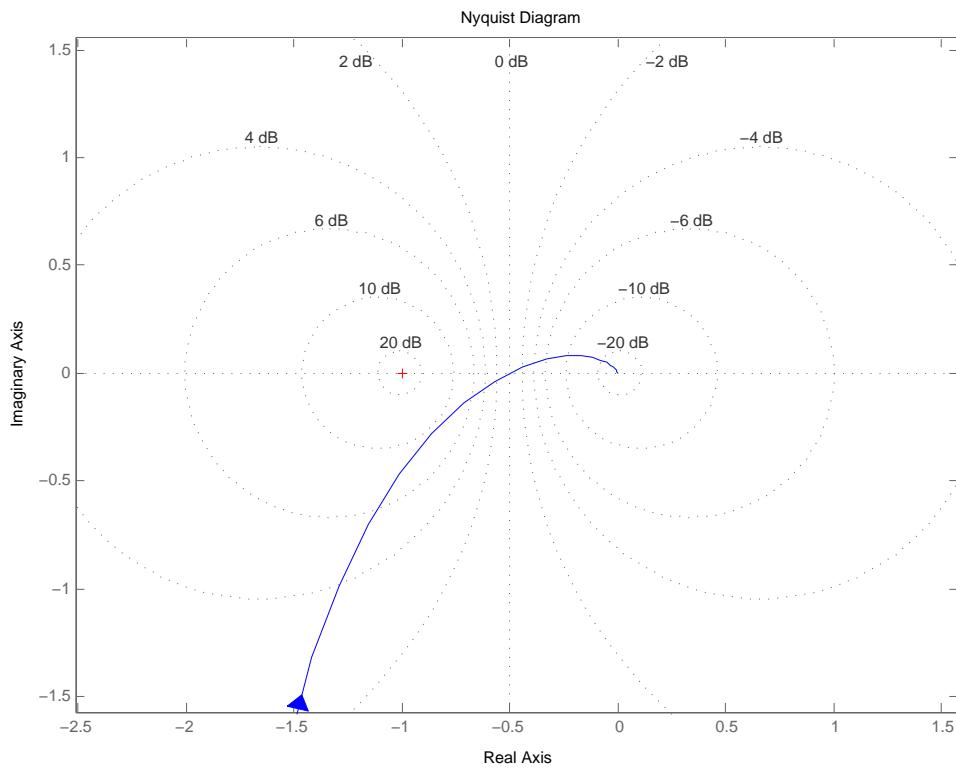


Figura 1.4: Diagramma di Nyquist tracciato sul piano $X - Y$ in presenza dei cerchi M.

In modo analogo è possibile costruire delle curve a modulo costante in funzione del modulo (espresso in dB) e della fase di $G(j\omega)$ (anziché dalla parte reale ed immaginaria). Tali curve rappresentano la cosiddetta *carta di Nichols* la quale permette di valutare il picco di risonanza e la banda passante in modo analogo al precedente ma a partire dal diagramma di Nichols. Un esempio è riportato in Fig. 1.5.

Nonostante i risultati forniti finora facciano riferimento alla funzione di sensitività complementare $T(s)$, risultano facilmente adattabili anche per l'analisi della funzione di

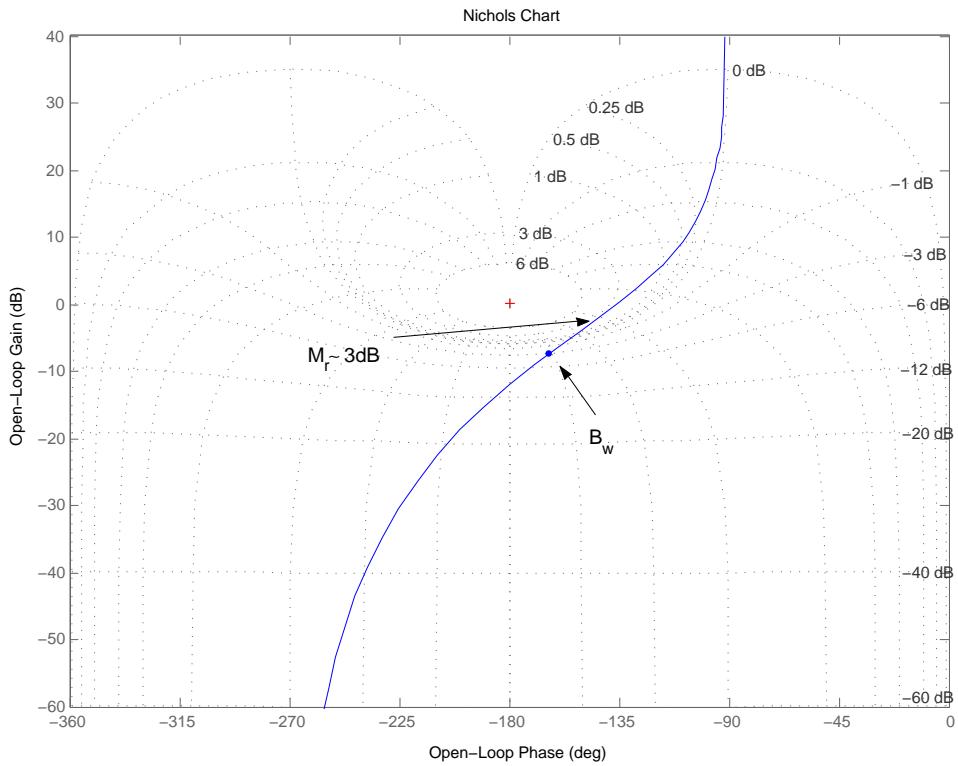


Figura 1.5: Diagramma di Nichols tracciato sulla carta di Nichols.

sensitività. La funzione $S(s)$ si può infatti scrivere come:

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{G^{-1}(s)}{1 + G^{-1}(s)}.$$

Una volta tracciato il diagramma di Nichols di $G(j\omega)$, per ottenere quello di G^{-1} è sufficiente invertire il segno del modulo e della fase, ottenendo un diagramma simmetrico rispetto all'origine. Da tale diagramma sarà quindi possibile valutare le caratteristiche di $S(j\omega)$, usando ancora la carta di Nichols.

1.2 Specifiche dei sistemi di controllo nel dominio del tempo

Sia dato il sistema in retroazione in Fig. 1.6. Le specifiche nel dominio del tempo di un sistema di controllo possono essere suddivise in 3 categorie:

1. Specifiche sul regime permanente

2. Specifiche sul comportamento transitorio
3. Specifiche sul comando.

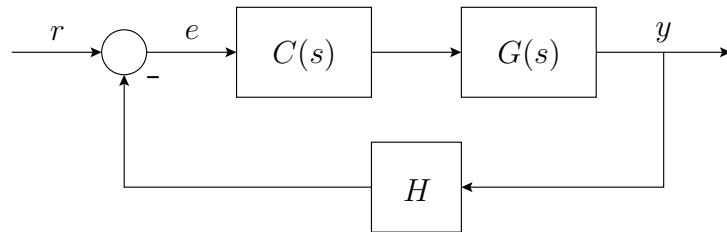


Figura 1.6: Sistema di controllo in retroazione.

1.2.1 Specifiche sul regime permanente

Per *specifiche sul regime permanente* si intendono quelle specifiche che impongono dei vincoli alla risposta in regime permanente del sistema ad anello chiuso.

Rapporto ingresso/uscita

Facendo riferimento al sistema in Fig. 1.6, una prima specifica tipica riguarda il rapporto tra ingresso ed uscita (k_d). Questo equivale a dire che, fissato il riferimento ad un determinato valore y_0 , si vuole che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y}{y_0} = k_d.$$

Risulta evidente che per soddisfare questa condizione è necessario imporre che:

$$H = k_d^{-1}.$$

Se H è una funzione di trasferimento dinamica, allora $H(s)|_{s=0} = k_d^{-1}$.

Inseguimento del riferimento: tipo di un sistema ed errore di inseguimento

Sia dato il sistema in Fig. 1.7. Poiché saremo interessati ad analizzare il comportamento dell'uscita rispetto al riferimento, nel seguito assumeremo nullo il valore del disturbo d . Il sistema di Fig. 1.7 potrà quindi essere trasformato nel sistema equivalente riportato in Fig. 1.8, dove il segnale y_r si dice *uscita ridotta*.

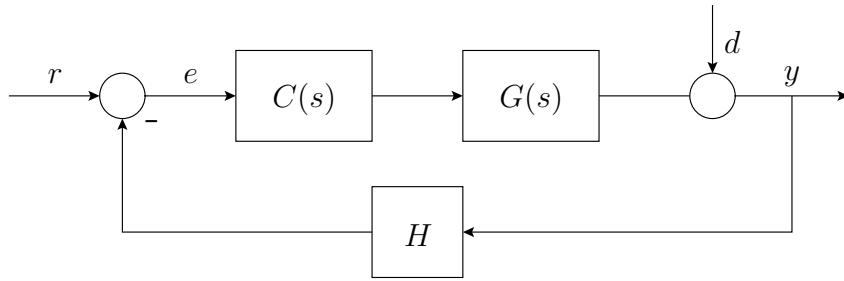
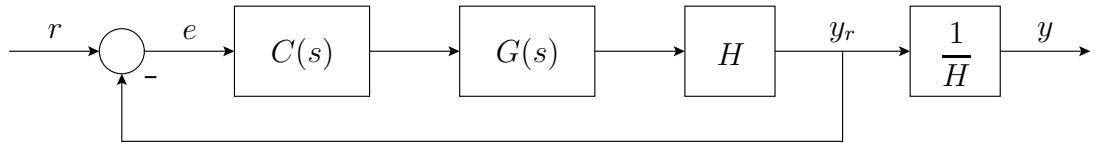


Figura 1.7: Sistema di controllo in retroazione.

Figura 1.8: Sistema di controllo equivalente a quello di Fig. 1.7 ($d = 0$).

Nel seguito analizzeremo l’andamento dell’errore di inseguimento al variare del segnale di riferimento, che supporremo essere un gradino, una rampa lineare o una rampa parabolica.

Errore di inseguimento al gradino

Si supponga che il segnale di riferimento r sia un gradino unitario, cioè $r(t) = 1 \cdot u(t)$ dove:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}.$$

Si definisce come errore di inseguimento al gradino il seguente valore:

$$e_{grad} = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - y(t)).$$

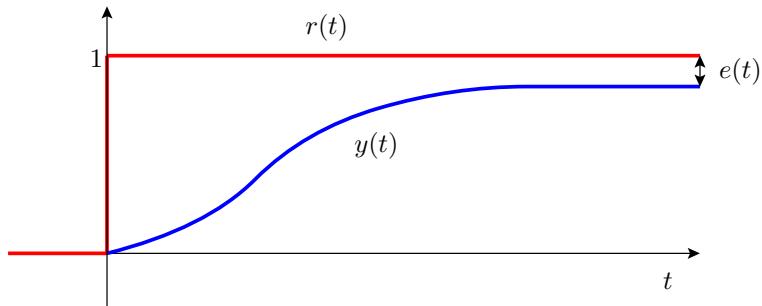


Figura 1.9: Errore di inseguimento al gradino unitario.

Errore di inseguimento alla rampa lineare

In modo analogo a quanto descritto in precedenza, è possibile valutare l'errore di inseguimento quando il segnale di riferimento è una rampa lineare, cioè $r(t) = t \cdot u(t)$.

$$e_{rampa} = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t - y(t)).$$

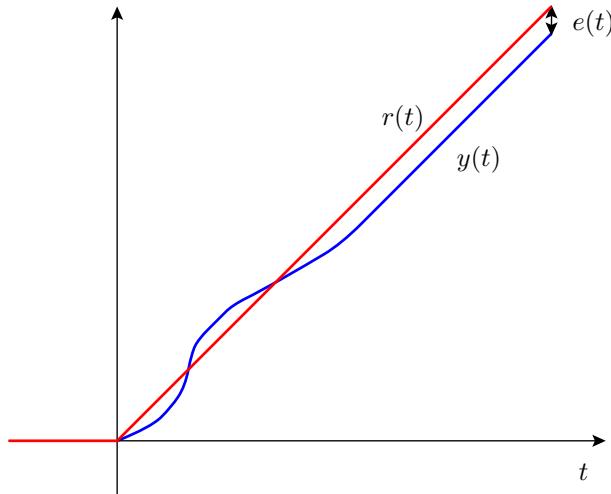


Figura 1.10: Errore di inseguimento alla rampa lineare.

Errore di inseguimento alla rampa parabolica

Se il riferimento è pari a $r(t) = t^2 \cdot u(t)$ sarà possibile valutare l'errore di inseguimento alla rampa parabolica come:

$$e_{par} = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t^2 - y(t)).$$

Per poter rappresentare i precedenti 3 casi, possiamo assumere la trasformata di Laplace del riferimento pari a:

$$R_k(s) = \frac{A}{s^{k+1}} \quad \text{con } k \geq 0.$$

L'errore di inseguimento risulterà:

$$E_k(s) = \frac{1}{1 + CGH} R_k(s) = \frac{1}{1 + CGH} \frac{A}{s^{k+1}}.$$

Supponiamo di scrivere la funzione $G(s)$ nel seguente modo:

$$G(s) = \frac{k_G}{s^h} G'(s) \quad \text{dove } G'(s) \text{ è tale che } \lim_{s \rightarrow 0} G'(s) = 1.$$

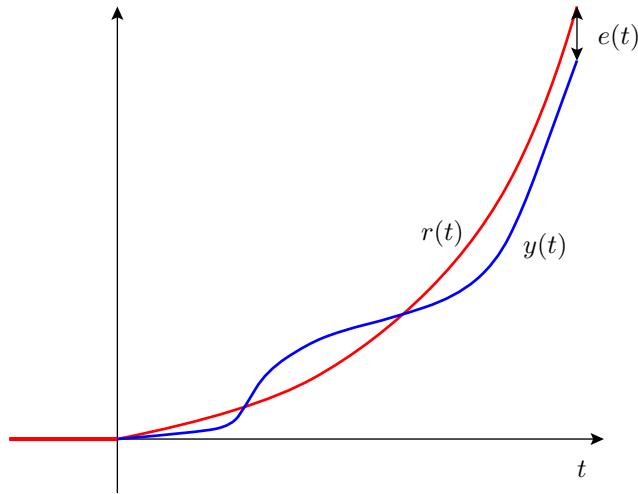


Figura 1.11: Errore di inseguimento alla rampa parabolica.

Analogamente possiamo scrivere $C(s) = k_c C'(s)$ con $C'(0) = 1$.

Per il teorema del valore finale risulterà che:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} e_k(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s E_k(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + CGH} \frac{A}{s^k} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + CH \frac{k_G}{s^h} G'(s)} \frac{A}{s^k} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^h}{s^h + CH k_G G'(s)} \frac{A}{s^k} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^h}{s^h + k_c C'(0) H k_G G'(0)} \frac{A}{s^k} \\
 &\underset{\text{se } h \neq 0}{=} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^h}{k_c C'(0) H k_G G'(0)} \frac{A}{s^k} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{k_c H k_g} s^{h-k}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Quindi:

- se $h > k \rightarrow e_k(\infty) = 0$;
- se $h = k \rightarrow e_k(\infty) \neq 0, e_k(\infty) < \infty$;
- se $h < k \rightarrow e_k(\infty) = \infty$.

Risulta evidente che il valore dell'errore di inseguimento dipende fortemente dal valore di h , ovvero del numero di poli in zero del sistema. Tale numero di poli in zero identifica il cosiddetto *tipo del sistema* (almeno nel caso in cui si assuma che $H = k_d^{-1}$).

E' opportuno notare che, nel caso $h = k$, il valore dell'errore a regime risulta finito. In questo caso bisogna porre attenzione al fatto che il segnale e_k misura l'errore di inseguimento dell'uscita ridotta (essendo $e_k = r - Hy$) e non sull'uscita reale. Nel caso si desideri calcolare l'errore sull'uscita dovremo moltiplicare l'errore sul riferimento per $k_d = 1/H$.

Esempio 1.1

Supponiamo di voler valutare l'errore di inseguimento (sull'uscita) al gradino unitario ($A = 1$) di un sistema di tipo 0. Mediante passaggi analoghi a quelli fatti in precedenza avremo che:

$$e(\infty) = \frac{k_d}{k_d + k_c k_G}.$$

L'errore sull'uscita risulterà quindi:

$$e_y(\infty) = \frac{k_d^2}{k_d + k_c k_G}.$$

Questo errore è evidentemente una quantità finita. Supponiamo adesso di voler annullare questo errore. Sarà necessario aggiungere un polo nell'origine al controllore, in modo tale che diventi del tipo:

$$C(s) = \frac{k_c}{s} C'(s).$$

Supponiamo adesso di avere un sistema di tipo maggiore o uguale ad 1. Se $h = k$ avremo:

$$e_y(\infty) = \frac{k_d^2}{k_c k_G}.$$

Solitamente, verrà richiesto che tale valore risulti minore od uguale ad un certo valore prestabilito ε , ovvero:

$$e_y(\infty) = \frac{k_d^2}{k_c k_G} \leq \varepsilon.$$

Essendo k_G ed k_d fissati, potremo dedurre il campo di ammissibilità per k_c dalla precedente disuguaglianza.

Problema di reiezione dei disturbi

Facendo riferimento alla Fig. 1.7, vogliamo adesso valutare l'influenza del disturbo d sull'andamento del sistema. In questo caso fisseremo il riferimento a zero; la funzione di trasferimento tra il disturbo e l'uscita risulta:

$$T_{d,y} = \frac{1}{1 + CGH} = S$$

che è esattamente uguale alla funzione di trasferimento tra il riferimento e l'errore, ed è pari alla funzione di sensitività. Sarà quindi possibile ripetere tutti i ragionamenti esposti in precedenza, ottenendo risultati analoghi. Ad esempio, potremo affermare che un sistema di tipo 1 reietta completamente eventuali disturbi a gradino.

1.2.2 Specifiche sul comportamento transitorio

A differenza di quanto visto in precedenza, analizziamo adesso il comportamento dell'uscita in fase transitoria. A tal fine si usa considerare la risposta al gradino del sistema. In generale, tale risposta risulta di tipo oscillatorio, come quella riportata in Fig. 1.12.

E' quindi possibile definire i seguenti indici di prestazione:

- **Tempo di salita (T_s):** è il tempo necessario all'uscita per raggiungere per la prima volta il valore di regime. Talvolta si può indicare con questo termine il tempo necessario all'uscita per passare dal 10% al 90% del valore di regime. Solitamente si adotta questa seconda definizione quando il valore di regime viene raggiunto asintoticamente.
- **Tempo di assestamento (T_a):** è il tempo necessario perché l'uscita si assesti in una banda (solitamente del 2% o 5%) attorno al valore di regime.
- **Sovraelongazione massima (Overshoot) (\hat{s}):** è definita come la differenza tra il valore massimo assunto dall'uscita ed il valore di regime. Solitamente si usa esprimere tale valore in percentuale rispetto al valore di regime. Il valore di tempo T_m corrispondente alla massima sovraelongazione si dice *tempo di massima sovraelongazione* (o *di picco*).

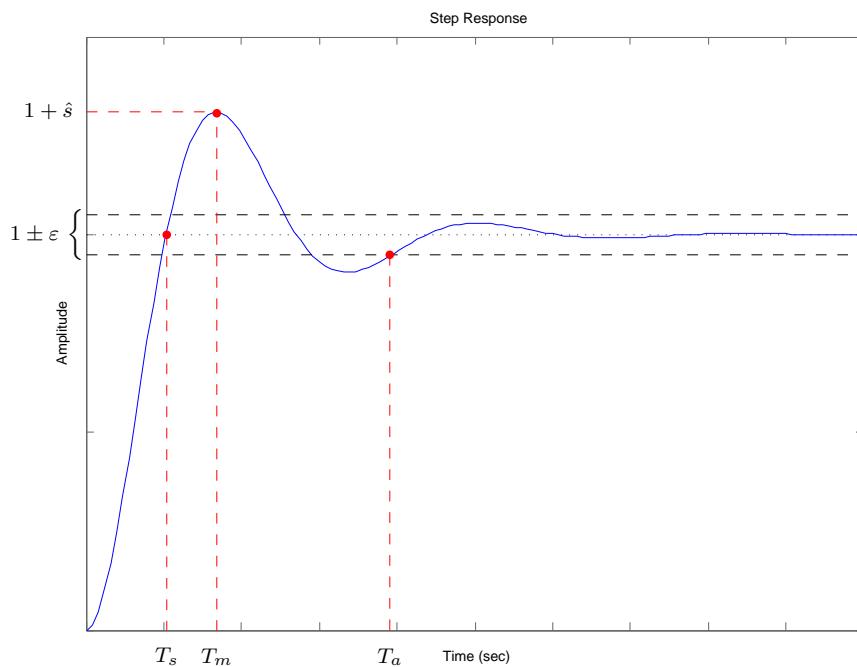


Figura 1.12: Specifiche nel transitorio.

1.2.3 Specifiche sul comando

Supponiamo di avere lo schema riportato in Fig. 1.13, in cui $G(s) = \frac{k_T}{1 + sT}$.

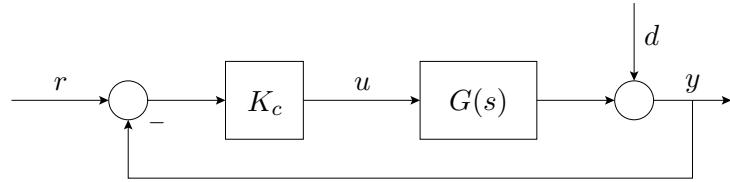


Figura 1.13: Schema di sistema in retroazione.

Possiamo calcolare la funzione di sensitività complementare come:

$$T(s) = \frac{k_c G(s)}{1 + k_c G(s)} = \frac{k_c k_T}{1 + sT + k_c k_T} = \frac{k_c k_T}{1 + k_c k_T} \cdot \frac{1}{1 + s \frac{T}{1 + k_c k_T}}.$$

Analogamente la funzione di sensitività risulterà:

$$S(s) = \frac{1}{1 + k_c G(s)} = \frac{1 + sT}{1 + sT + k_c k_T} = \frac{1}{1 + k_c k_T} \cdot \frac{1 + sT}{1 + s \frac{T}{1 + k_c k_T}}.$$

Un incremento di k_c si tradurrà in un aumento della prontezza del sistema. D'altronde, essendo il margine di fase maggiore di zero per qualunque $k_c > 0$, non ci sarà il rischio che il sistema diventi instabile, ed il sistema presenterà una sensitività sempre più bassa al crescere di k_c .

Andiamo adesso ad analizzare la funzione di eccitazione del comando, ovvero la funzione di trasferimento tra il segnale di riferimento r ed il comando u . Risulterà:

$$T_{r,u}(s) = \frac{k_c}{1 + k_c G(s)}.$$

Assumendo un riferimento a gradino unitario, avremo:

$$U(s) = T_{r,u}(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{k_c}{1 + k_c k_T} \cdot \frac{1 + sT}{1 + s \frac{T}{1 + k_c k_T}}$$

la cui risposta temporale è riportata in Fig. 1.14. Un aumento di k_c si traduce quindi in un aumento del valore del comando u nei primi istanti di tempo. Valori troppo elevati di k_c potranno quindi non essere accettabili dal punto di vista della sicurezza, in quanto potrebbero richiedere dei comandi troppo intensi e produrre quindi malfunzionamenti o rotture dell'impianto.

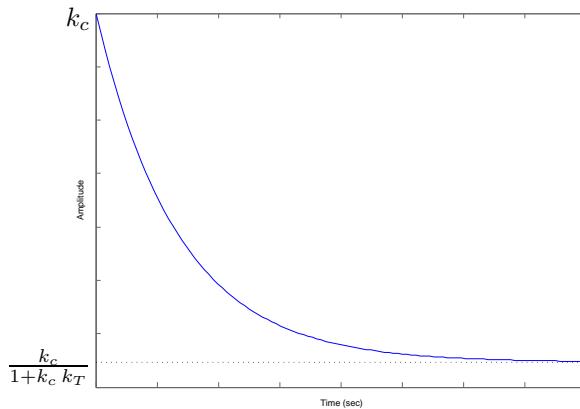


Figura 1.14: Andamento del segnale di comando $u(t)$.

Oltre a quanto descritto in precedenza, una ulteriore specifica inerente il segnale di comando può essere la seguente:

$$|T_{r,u}(j\omega)| \leq \alpha \quad , \quad \forall \omega \geq \bar{\omega} \quad ,$$

dove i valori α ed $\bar{\omega}$ sono fissati. In pratica viene imposto un limite superiore al modulo di $T_{r,u}$ per le alte frequenze.

1.3 Specifiche nel dominio della frequenza

Oltre alle specifiche nel dominio del tempo riportate in precedenza, è possibile definire anche degli indici di prestazione in frequenza sul sistema in anello chiuso. Tali indici, alcuni dei quali sono già stati anticipati in precedenza, sono:

- **Picco di risonanza (M_r):** è definito come il valore massimo del modulo della funzione ad anello chiuso meno il valore di regime. Tale valore viene comunemente espresso in decibel.
- **Banda passante (B_w):** è la frequenza alla quale il modulo della funzione ad anello chiuso è pari al valore di regime meno 3 dB. Essendo la banda passante una pulsazione, essa viene espressa in rad/s .
- **Margine di fase (ϕ_m):** è definito dalla seguente espressione:

$$\phi_m = \angle G(j\omega_c) + 180^\circ$$

dove G è la funzione di trasferimento ad anello aperto e ω_c è la frequenza a cui il modulo di $G(j\omega)$ ha valore unitario.

- **Pulsazione di risonanza** (ω_r): nel caso in cui il sistema ad anello chiuso presenti una risonanza, ω_r è la pulsazione di tale risonanza.
- **Pulsazione di attraversamento** (ω_c): è la pulsazione alla quale il modulo della funzione ad anello aperto è unitario.
- **Coefficiente di smorzamento** (ζ): assumendo che il sistema ad anello chiuso sia approssimabile ad un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati ζ denota il coefficiente di smorzamento di tali poli (ω_n denoterà altresì la loro pulsazione naturale).

Di seguito vengono riportate alcune formule di conversione tra varie specifiche (sia temporali che frequenziali). E' opportuno notare che molte formule sono approssimate (le formule esatte si riferiscono a sistemi del secondo ordine), e che i valori di M_r ed \hat{s} sono espressi in scala assoluta.

$$\phi_m \simeq \frac{2.3 - M_r}{1.25} \quad (\phi_m \text{ espresso in radianti})$$

$$\phi_m \simeq 100 \zeta \quad (\phi_m \text{ espresso in gradi})$$

$$\omega_c \simeq (0.5 \div 0.8) B_w$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$M_r \simeq \frac{1 + \hat{s}}{[0.85 \div 1]}$$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$B_w = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

$$T_s B_w \simeq 3$$

$$T_s = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \left[\pi - \text{atan} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right]$$

$$\hat{s} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}}$$

$$T_{ass}^{2\%} \simeq \frac{4}{\xi \omega_n}$$

$$T_{ass}^{5\%} \simeq \frac{3}{\xi \omega_n}.$$