1

Il luogo delle radici (ver. 1.0)

Sia dato il sistema in retroazione riportato in Fig. 1.1. Il luogo delle radici è uno strumento mediante il quale è possibile valutare la posizione dei poli della funzione ad anello chiuso nel piano complesso al variare del guadagno k^*.

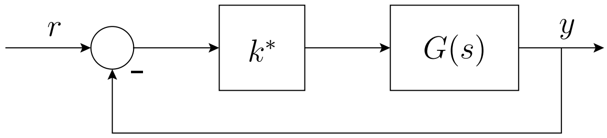

Figura 1.1: Schema in retroazione utilizzato per la determinazione del luogo delle radici.

Esempio 1.1
Supponiamo di avere:

$$G(s) = \frac{1}{s\,(s+2)}.$$

La funzione in catena diretta risulterà:

$$L(s) = k^*\,G(s) = \frac{k^*}{s\,(s+2)},$$

mentre la funzione dell'anello chiuso sarà:

$$\overline{G}(s) = \frac{k^*}{s\,(s+2)+k^*} = \frac{k^*}{s^2+2s+k^*}.$$

Poiché i poli di $\overline{G}(s)$ *sono gli zeri dell'equazione caratteristica* $s^2+2s+k^*=0$*, avremo:*

$$p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-k^*}.$$

Risulta quindi che per $k^*=0$ *(anello aperto) le radici sono* 0 *e* -2*.*

Sarà quindi possibile tracciare sul piano complesso l'andamento dei poli al variare di k^*, *considerando sia i valori positivi che negativi. Ciò che otterremo è riportato in Fig. 1.2. Tale figura rappresenta il* luogo delle radici *del sistema in esame; il diagramma calcolato per* $k^* > 0$ *si dice* luogo diretto, *mentre quello per* $k^* < 0$ *si dice* luogo complementare.

Dalla figura si può notare che per $k^* = 1$ *le due radici risultano coincidenti in* -1.

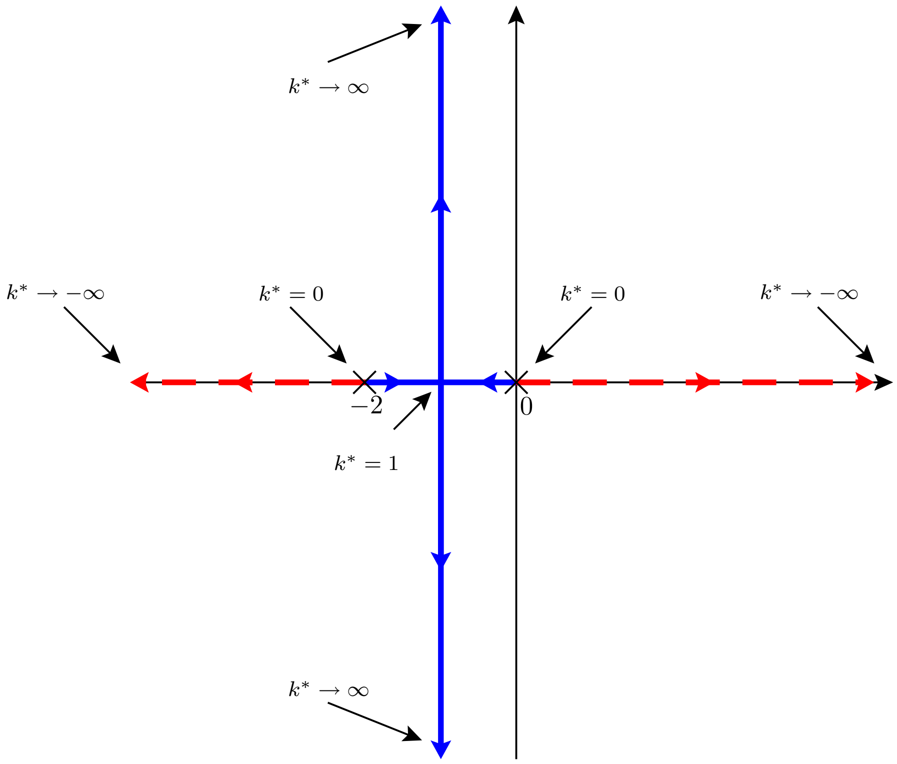

Figura 1.2: Esempio di luogo delle radici; $(-)$=diretto, $(--)$= complementare.

Notare che la retroazione cambia i poli del sistema mantenendo invariati gli zeri rispetto all'anello aperto.

Per poter tracciare il luogo delle radici è opportuno scrivere la funzione $L(s)$ nella forma zeri-poli, e cioè:

$$L(s;k^*) = k^* \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)} \qquad \text{con } m < n.$$

L'equazione caratteristica $1 + L(s,k^*) = 0$ risulta:

$$1 + k^* \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)} = 0$$

cioè:

$$\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+k^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)=0$$

ovvero:

$$\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)=-k^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i). \tag{1.1}$$

Affinché la (1.1) sia verificata è necessario che siano soddisfatte le seguenti due condizioni:

- **condizione di modulo:**

$$|k^*|=\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\displaystyle\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|}$$

- **condizione di fase:**

$$\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-z_i)=\pi+\angle k^*+2\,h\,\pi \quad , \; h\in\mathbb{Z}$$

  cioè:

$$\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-z_i)=\begin{cases}(2\,h+1)\,\pi & \text{luogo diretto}\\ 2\,h\,\pi & \text{luogo complementare.}\end{cases}$$

Dalla condizione di fase, che definisce il luogo diretto e quello complementare, risulta che il luogo da tracciare sarà quello diretto nel caso di retroazione negativa e guadagno positivo oppure retroazione positiva e guadagno negativo. Viceversa, il luogo complementare dovrà essere utilizzato nel caso di retroazione negativa e guadagno negativo oppure di retroazione positiva e guadagno positivo.

1.1 Regole per il tracciamento del luogo delle radici

Di seguito sono riportate le principali regole utili per il tracciamento del luogo delle radici.

- Il luogo delle radici possiede n rami ($n =$numero dei poli).
- Tutti i rami originano dai poli ad anello aperto del sistema ($k^*=0$).
- Per $k^*\to\infty$, m rami tendono agli zeri, mentre $(n-m)$ tendono all'infinito.

- Un punto dell'asse reale appartiene al luogo diretto se ha un numero dispari di singolarità alla sua destra, altrimenti appartiene al luogo complementare. Questa proprietà può essere facilmente dimostrata a partire dalla condizione di fase. Si consideri infatti il caso riportato in Fig. 1.3. Per ogni punto sull'asse reale $\hat{s}$ a sinistra di un polo o di uno zero, risulterà $\angle(\hat{s}-p)=\pi$, mentre per ogni punto $\bar{s}$ a destra, avremo $\angle(\bar{s}-p)=0$.

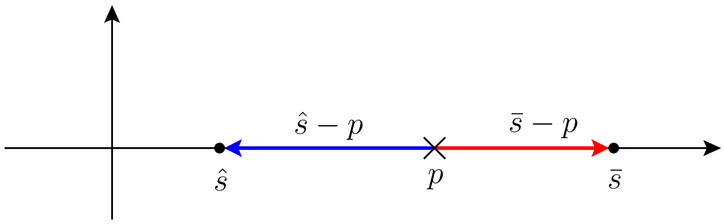

Figura 1.3: Determinazione del luogo delle radici per i punti sull'asse reale.

- Gli $(n-m)$ rami che tendono all'infinito per $k^*\to\infty$, seguono degli asintoti centrati in:
$$s_0=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}\qquad\text{(centro stella).}$$
Tali asintoti formano una stella regolare la cui fase è:
$$\begin{cases}\dfrac{(2\,h+1)\,\pi}{n-m}\ ,\ h\in\mathbb{Z} & \text{per il luogo diretto}\\[2ex] \dfrac{2\,h\,\pi}{n-m}\ ,\ h\in\mathbb{Z} & \text{per il luogo complementare.}\end{cases}$$
Infatti, si può dimostrare che:
$$\lim_{k^*\to\infty}L(s;k^*)=\frac{1}{(s-s_0)^{n-m}}.$$
Dalla condizione di fase segue che il luogo diretto deve soddisfare:
$$\sum^{n-m}\angle(s-s_0)=(n-m)\angle(s-s_0)=(2h+1)\,\pi,$$
ovvero
$$\angle(s-s_0)=\frac{(2h+1)\,\pi}{n-m}.$$
Analogo ragionamento può essere ripetuto per quanto riguarda il luogo complementare.

- Il luogo delle radici è sempre simmetrico rispetto all'asse reale.

- Le intersezioni tra i rami, che avvengono sempre secondo una stella regolare, sono i punti singolari della mappa $F(s; k^*) = 1 + L(s, k^*) = 0$. Tali punti soddisfano:

$$\begin{cases} F(s\,; k^*) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial s} = 0. \end{cases}$$

Esempio 1.2
Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$L(s) = k^* \frac{(s+1)}{s^2\,(s+3)}.$$

Il luogo delle radici è riportato in Fig.1.4.

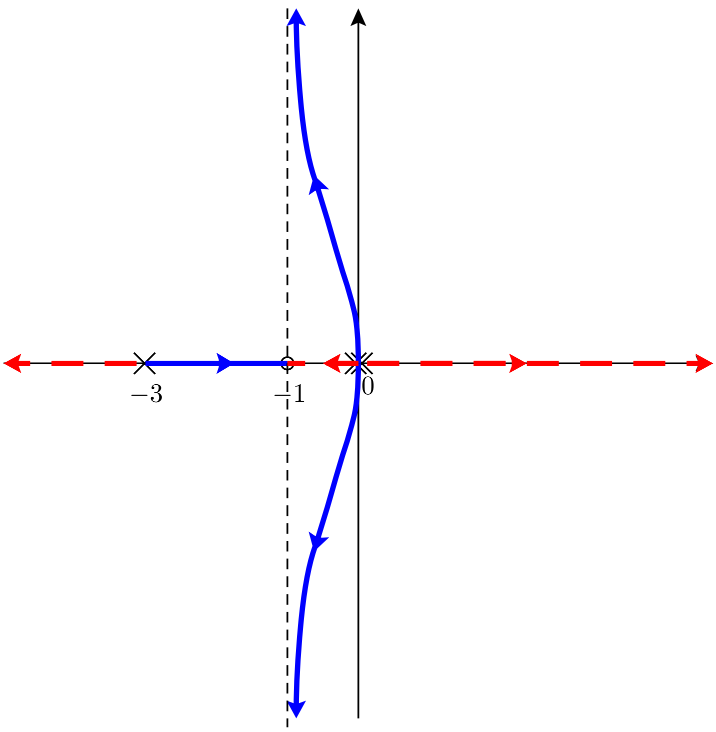

Figura 1.4: Luogo delle radici diretto (−) e complementare (− −) per il sistema dell'esempio 1.2.

Il centro stella risulta:

$$s_0 = \frac{-3+1}{2} = -1$$

mentre gli asintoti formano un angolo pari a:

$$\varphi_0 = \left\langle \begin{array}{ll} \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\,\pi}{2}\right\} & \textit{per il luogo diretto} \\ \\ \{0,\,\pi\} & \textit{per il luogo complementare.} \end{array} \right.$$

Possiamo quindi dedurre che per $k < 0$ il sistema in anello chiuso sarà sempre instabile (1 polo nel semipiano destro), mentre per $k > 0$ il sistema sarà sempre stabile.

Esempio 1.3

Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$L(s) = k^* \frac{1}{(s-2)^2\,(s^2+1)\,(s+1)^2}.$$

Il luogo delle radici è riportato in Fig.1.5.

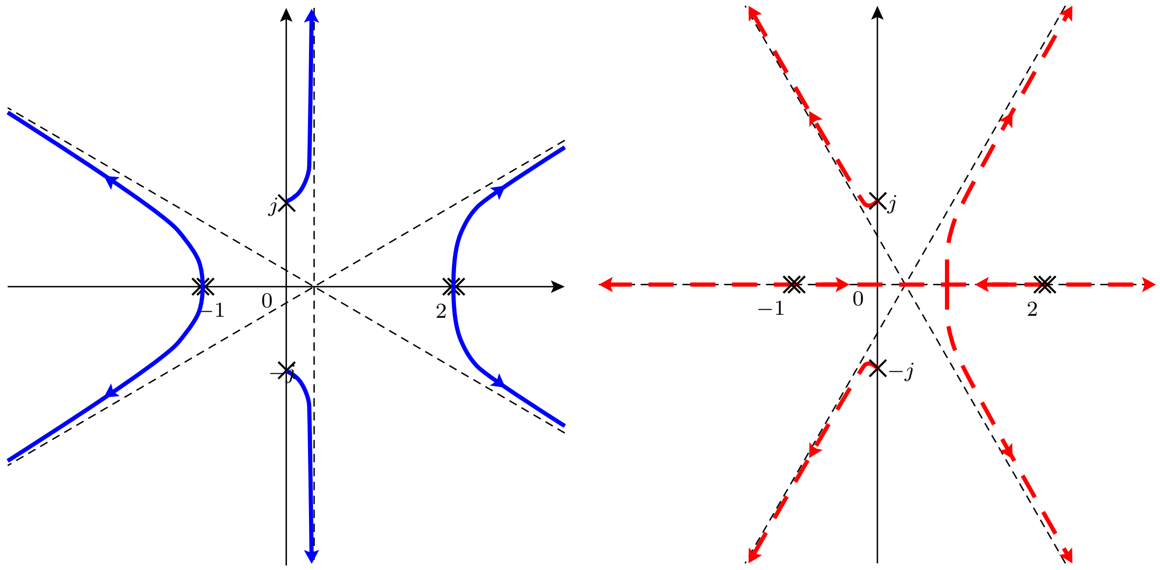

Figura 1.5: Luogo delle radici diretto (−) e complementare (− −) per il sistema dell'esempio 1.3.

Il centro stella risulta:

$$s_0 = \frac{2+2+j-j-1-1}{6} = \frac{1}{3}$$

mentre gli asintoti formano un angolo pari a:

$$\varphi_0 = \left\langle \begin{array}{ll} \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{11\pi}{6}\right\} & \textit{per il luogo diretto} \\ \\ \left\{0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\} & \textit{per il luogo complementare.} \end{array} \right.$$