Prova intermedia di IDENTIFICAZIONE E ANALISI DEI DATI del 12.11.2007

Candidato: ....

Esercizio 1.
Siano $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ due variabili aleatorie indipendenti distribuite uniformemente nell'intervallo $[0, \theta]$, dove θ è un parametro incognito. Si considerino due variabili aleatorie $\boldsymbol{y}_1$ e $\boldsymbol{y}_2$ tali che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{y}_2 &= 2\boldsymbol{x}_2^2 \end{aligned}$$

I) Determinare il valore atteso $E[\boldsymbol{y}_1]$, $E[\boldsymbol{y}_2]$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$.

II) Determinare la densità di probabilità congiunta $f_{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2}(y_1, y_2)$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, in funzione del parametro θ.

III) Determinare lo stima di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ del parametro θ, basata su una osservazione y_1, y_2 delle variabili aleatorie $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$.

Esercizio 2.
Sul parametro incognito θ vengono effettuate due misure

$$\begin{aligned} y_1 &= 4\theta + v_1 \\ y_2 &= 2\theta + v_2 \end{aligned}$$

dove v_1 e v_2 sono realizzazioni di variabili aleatorie a media nulla, e tali che $E[v_1^2] = 2$, $E[v_2^2] = 2$, $E[v_1 v_2] = 1$.

I) Determinare lo stimatore ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ, basato sulle misure y_1 e y_2, ed il relativo errore quadratico medio $E[(\theta - \hat{\theta}_{LS})^2]$.

II) Determinare lo stimatore di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ, basato sulle misure y_1 e y_2, ed il relativo errore quadratico medio $E[(\theta - \hat{\theta}_{GM})^2]$.

III) Si assuma ora che il valor medio delle variabili aleatorie v_1 e v_2 sia $E[v_1] = E[v_2] = m$, dove m è una costante incognita che deve essere stimata, e inoltre sia $E[(v_1 - m)^2] = 2$, $E[(v_2 - m)^2] = 2$, $E[(v_1 - m)(v_2 - m)] = 1$. Determinare la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$, $\hat{m}_{LS}$ di θ ed m, basata su y_1 e y_2. Calcolare inoltre l'errore quadratico medio di stima relativo a θ, $E[(\theta - \hat{\theta}_{LS})^2]$.

Esercizio 3.
Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie con densità di probabilità congiunta

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y) = \begin{cases} \gamma - x - y & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove γ è un parametro reale.

I) Calcolare il valore di γ in modo che la $f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ sia effettivamente una funzione di densità della probabilità.

II) Determinare la densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}}(x|y)$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{x}$, condizionata al valore y assunto dalla variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$.

III) Supponendo di disporre di una osservazione y della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$, calcolare la stima di $\boldsymbol{x}$ a minimo errore quadratico medio, $\hat{\boldsymbol{x}}_{MEQM}$, basata sull'osservazione y.

Esercizio 4.
Si consideri il processo stocastico $y(t)$ descritto dall'equazione alle differenze

$$y(t) + \frac{1}{2} y(t-2) = w(t) - 5.5w(t-1) + 2.5w(t-2)$$

dove $w(t)$ è un processo stocastico bianco, a media nulla e di varianza $\sigma_w^2 = 4$.

I) Determinare lo spettro $\Phi_y(z)$ del processo $y(t)$.

II) Determinare l'equazione alle differenze del predittore ottimo LMEQM a due passi in avanti $\hat{y}(t+2|t)$ per il processo stocastico $y(t)$, ed il relativo errore quadratico medio di predizione: $EQM = E\left[\{y(t+2) - \hat{y}(t+2|t)\}^2\right]$.

III) Supponendo ora di poter scegliere il processo $w(t)$ in ingresso, determinare il tipo di processo (MA, AR o ARMA) e l'equazione alle differenze di $w(t)$, in modo che il processo $y(t)$ risulti essere un MA(1) con spettro pari a $\Phi_y(z) = 5 - 2z^{-1} - 2z$.