

Candidato:

Corso di Laurea:

Esercizio 1. Sia $\mathbf{y}$ una variabile aleatoria che soddisfa la relazione

$$\mathbf{y} = 3\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

dove $\mathbf{x}$ è una variabile aleatoria Gaussiana a media nulla e varianza pari a 5; $\mathbf{v}$ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, T]$, scorrelata da $\mathbf{x}$.

- I) Assumendo $T = 2$, determinare lo stimatore LMEQM di $\mathbf{x}$ basato su una osservazione y della variabile aleatoria $\mathbf{y}$.
- II) Determinare per quali valori di T è possibile costruire uno stimatore lineare di $\mathbf{x}$, basato su una osservazione y della variabile aleatoria $\mathbf{y}$, tale per cui il corrispondente errore quadratico medio sia minore di 1.
- III) Si assuma ora che $\mathbf{v}$ non sia una variabile aleatoria, ma un parametro incognito sul quale non è disponibile alcuna informazione a priori. Determinare lo stimatore a massima verosimiglianza $\hat{\mathbf{v}}_{MV}$ di $\mathbf{v}$, basato su una osservazione y della variabile aleatoria $\mathbf{y}$, ed il relativo errore quadratico medio $E[(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}_{MV})^2]$. Lo stimatore ottenuto è efficiente? Perché?

Esercizio 2. All'interno di una mappa bidimensionale su un piano $x - y$, sono riportati 4 punti (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3, 4$. Si suppone che, a meno di errori di misura, tali punti siano allineati lungo una retta di equazione

$$y_i = ax_i + b + e_i$$

dove gli e_i rappresentano gli errori di misura, e le costanti a e b sono parametri incogniti da determinare. Si assuma $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, e gli errori e_i siano modellati come variabili aleatorie tra loro indipendenti, a media nulla e di varianza pari rispettivamente a $E[e_1^2] = 1$, $E[e_2^2] = 2$, $E[e_3^2] = 3$, $E[e_4^2] = 4$.

- I) Determinare lo stimatore ai minimi quadrati $\hat{a}_{LS}$, $\hat{b}_{LS}$ di a e b , basato sulle misure y_i , $i = 1, 2, 3, 4$, ed il relativo errore quadratico medio relativo al parametro a , $E[(a - \hat{a}_{LS})^2]$.
- II) Determinare lo stimatore di Gauss-Markov $\hat{a}_{GM}$, $\hat{b}_{GM}$ di a e b , basato sulle misure y_i , $i = 1, 2, 3, 4$, ed il relativo errore quadratico medio relativo al parametro a , $E[(a - \hat{a}_{GM})^2]$.
- III) Supponendo ora che il valore di b sia noto e pari a 1, determinare lo stimatore di Gauss-Markov $\hat{a}_{GM}$ di a , basato sulle misure y_i , $i = 1, 2, 3, 4$, ed il relativo errore quadratico medio $E[(a - \hat{a}_{GM})^2]$.

Esercizio 3. Si consideri il processo stocastico $y(k)$ generato come mostrato in Figura 1, dove

$$G(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad , \quad H(z) = 1 - \frac{2}{3}z^{-1}.$$

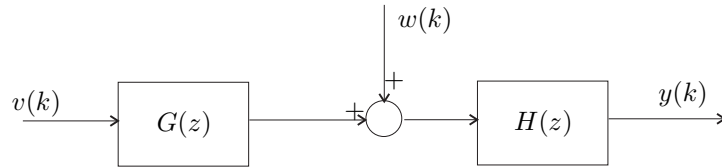


Figura 1.

Si supponga che $v(k)$ sia un processo stocastico bianco, a media nulla e varianza pari a $\sigma_v^2 = \frac{31}{4}$, e che $w(k)$ sia un processo stocastico descritto dall'equazione

$$w(k) - \alpha w(k-1) = e(k)$$

dove α è un coefficiente reale, e $e(k)$ è un processo bianco, a media nulla e varianza pari a $\sigma_e^2 = 8$, indipendente da $v(k)$.

- I) Determinare per quali valori di α il processo stocastico $y(k)$ risulta essere asintoticamente stazionario e calcolarne lo spettro $\Phi_y(z)$.
- II) Assumendo $\alpha = 0$, determinare l'equazione alle differenze del predittore ottimo LMEQM un passo in avanti $\hat{y}(k+1|k)$ per il processo stocastico $y(k)$ ed il relativo errore quadratico medio di predizione $EQM = E [\{y(k+1) - \hat{y}(k+1|k)\}^2]$.
- IV) Assumendo $\alpha = \frac{1}{4}$, determinare l'equazione alle differenze del predittore ottimo LMEQM due passi in avanti $\hat{y}(k+2|k)$ per il processo stocastico $y(k)$ ed il relativo errore quadratico medio di predizione $EQM = E [\{y(k+2) - \hat{y}(k+2|k)\}^2]$.

ATTENZIONE: Riportare i risultati di ogni domanda svolta nell'allegato foglio dei risultati.