

Candidato: Corso di Laurea

Esercizio 1. Si consideri il processo stocastico $y(t)$ generato come mostrato in Figura 1.

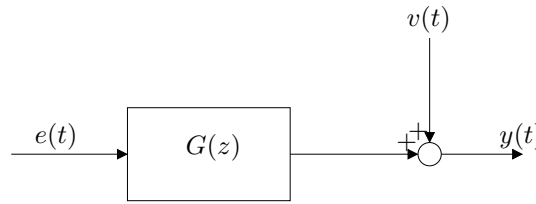


Figura 1.

Si supponga $e(t) \sim WN(0, 2)$, $v(t) \sim WN(0, 1)$ e che $e(t)$ sia indipendente da $v(t)$. Inoltre, sia

$$G(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}.$$

- I) Calcolare la funzione di covarianza $R_y(\tau)$ del processo stocastico $y(t)$.
- II) Calcolare la densità spettrale $\phi_y(e^{j\omega})$ del processo stocastico $y(t)$.
- III) Supponendo di poter scegliere arbitrariamente il processo di ingresso $e(t)$, determinarne lo spettro in modo tale che $y(t)$ sia un processo stocastico bianco con varianza pari a 2.
- IV) Individuare un'equazione alle differenze nel dominio del tempo che dia luogo al processo $e(t)$ determinato al punto precedente.

Esercizio 2. Si consideri il processo stocastico $y(t)$ generato come mostrato in Figura 2, dove $K > 0$ è un guadagno costante e $G(z) = 1 + \sqrt{3}z^{-1}$. Si supponga che il segnale $u(t)$ sia un processo stocastico bianco, a media nulla e varianza unitaria.

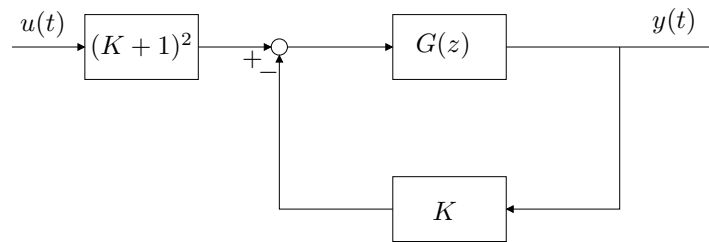


Figura 2.

- I) Determinare il massimo valore K_{max} di K per cui $y(t)$ è un processo stocastico asintoticamente stazionario. Nei punti successivi si supponga sempre $K < K_{max}$.
- II) Calcolare lo spettro $\Phi_y(z)$ del processo stocastico $y(t)$.
- III) Determinare l'equazione alle differenze del predittore ottimo LMEQM a due passi in avanti $\hat{y}(t+2|t)$ per il processo stocastico $y(t)$ ed il relativo errore quadratico medio di predizione $EQM = E[\{y(t+2) - \hat{y}(t+2|t)\}^2]$.
- IV) Determinare il massimo valore di K per cui l'errore quadratico medio del predittore ottimo LMEQM a due passi in avanti risulta essere minore di 13.

Esercizio 3. Sul parametro incognito θ vengono effettuate quattro misure

$$\begin{aligned}y_1 &= \theta + v_1 \\y_2 &= 3\theta + v_2 \\y_3 &= -\theta + v_3 \\y_4 &= -3\theta + v_4\end{aligned}$$

dove i v_i , $i = 1, \dots, 4$ sono realizzazioni di variabili aleatorie indipendenti a media nulla, e tali che $E[v_1^2] = E[v_2^2] = E[v_3^2] = 1$, $E[v_4^2] = \alpha$, con $\alpha > 0$.

- I) Determinare lo stimatore ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ , basato sulle misure y_i , $i = 1, \dots, 4$, ed il relativo errore quadratico medio $E[(\theta - \hat{\theta}_{LS})^2]$.
- II) Determinare lo stimatore di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ , basato sulle misure y_i , $i = 1, \dots, 4$, ed il relativo errore quadratico medio $E[(\theta - \hat{\theta}_{GM})^2]$.
- III) Determinare per quali valori di α , gli errori quadratici medi dei due stimatori calcolati ai punti precedenti risultano essere minori di 1.
- IV) Supponendo $\alpha = 2$, e sapendo di poter utilizzare solo due delle quattro misure disponibili, indicare quali misure occorre scegliere per minimizzare l'errore quadratico medio di stima (utilizzando uno stimatore lineare) e riportare il valore dell'errore così ottenuto.

Esercizio 4. Sia $\mathbf{y}$ una variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f_{\mathbf{y}}(y) = \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{\theta^3 - y^3}{\theta^4} & \text{se } 0 \leq y \leq \theta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\theta > 0$ è un parametro incognito.

- I) Determinare per quali valori di θ , il valore atteso della variabile aleatoria $\mathbf{y}$ è minore di $\frac{1}{2}$.
- II) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ del parametro θ , basato su una osservazione y della variabile aleatoria $\mathbf{y}$.
- III) Determinare uno stimatore corretto $\hat{\theta}_{\text{corr}}$ del parametro θ , basato su una osservazione y della variabile aleatoria $\mathbf{y}$.