Prova intermedia di IDENTIFICAZIONE E ANALISI DEI DATI del 19.11.2002

Candidato:

Esercizio 1.
Si consideri il processo stocastico tempo discreto $y(t)$ generato come rappresentato in Figura 1, dove l'ingresso $u(t)$ è un processo stocastico tale che $u(t) = e(t) + 2e(t-1)$ e $G(z) = \dfrac{1}{1 + 0.5z^{-1}}$.

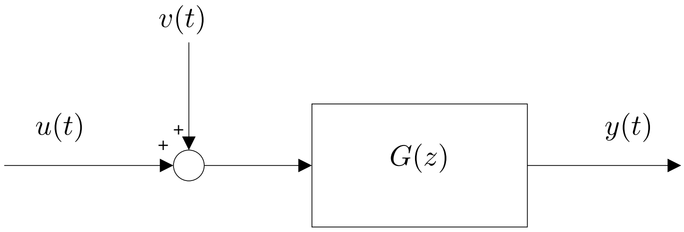

Figura 1.

Supponendo che $e(t)$ e $v(t)$ siano due rumori bianchi gaussiani scorrelati a media nulla e varianza $\sigma_e^2 = 1$ e $\sigma_v^2 = 2$, rispettivamente, determinare:

I) lo spettro $\Phi_y(z)$ del processo $y(t)$;

II) l'equazione del predittore lineare ottimo, a minimo errore quadratico medio, a due passi in avanti, che consenta di calcolare la predizione $\hat{y}(t+2|t)$;

III) la varianza dell'errore di predizione.

Esercizio 2.
Si supponga di disporre di due strumenti, A e B, ciascuno dei quali sia in grado di fornire contemporaneamente una misura del valore di un parametro incognito θ (misure y_{A1} e y_{B1}) e di 3 volte il suo valore (misure y_{A2} e y_{B2}). Tutte le misure sono affette da errori additivi, modellabili come variabili aleatorie gaussiane indipendenti, a media nulla e varianza dipendente dallo strumento. In particolare, indicando con e_{Ai} ed e_{Bi}, $i = 1, 2$, gli errori delle misure y_{Ai} e y_{Bi}, rispettivamente, siano:

$$e_{Ai} \sim N(0, 1/4) \qquad e_{Bi} \sim N(0, 2), \quad i = 1, 2.$$

I) Indicare quali dei seguenti stimatori del parametro incognito θ sono non polarizzati:

- $\hat{\theta}_1 = \frac{1}{4}(y_{A1} + y_{A2} + y_{B1} + y_{B2})$
- $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}(y_{A1} + y_{B1})$
- $\hat{\theta}_3 = \frac{1}{2}(y_{A1} + \frac{1}{3}y_{A2})$
- $\hat{\theta}_4 = y_{B2}^2$

A partire dalle misure y_{Ai}, y_{Bi}, $i = 1, 2$, calcolare

II) la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ e la relativa varianza $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{LS})$;

III) la stima di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ e la relativa varianza $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{GM})$;

IV) la stima a massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ di θ e la relativa varianza $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{ML})$.

Esercizio 3.
Sia X una variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) & \text{se } x \in [1,\ 3] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

I) Calcolare il valor medio $\mathrm{E}[X]$ e la varianza $\mathrm{Var}(X)$ di X.

Si consideri, ora, una seconda variabile aleatoria Y uniformemente distribuita nell'intervallo $[0,\ 2]$, e sia

$$Z = X + Y.$$

Nell'ipotesi che X ed Y siano indipendenti, calcolare:

II) il valor medio $\mathrm{E}[Z]$ e la varianza $\mathrm{Var}(Z)$ di Z;

III) [*facoltativo*] la densità di probabilità $f_Z(z)$ di Z.

Esercizio 4.
Sia dato il processo stocastico tempo discreto $y(t)$ generato come descritto in Figura 2, con

$$G(z) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{7}{3}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}, \qquad C(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}.$$

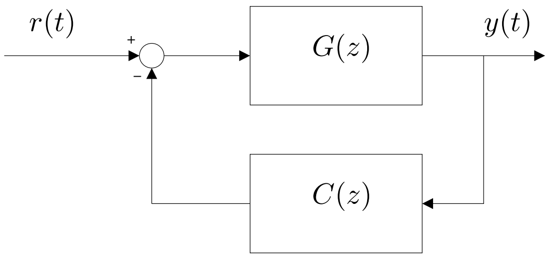

Figura 2.

I) Supponendo che $r(t)$ sia un processo bianco a media nulla e varianza pari a σ_r^2, dire che tipo di processo stocastico è $y(t)$ e scriverne l'equazione alle differenze nel dominio del tempo.

Si supponga, ora, che lo spettro dell'uscita $y(t)$ sia $\Phi_y(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)}$.

II) Determinare lo spettro $\Phi_r(z)$ di un processo $r(t)$ di tipo ARMA(2,1) che, posto in ingresso al sistema, dia luogo ad un'uscita con spettro pari a $\Phi_y(z)$.

Candidato:

Esercizio 1.

Risultati:
$$\left[\begin{array}{lll} (I) & : & \Phi_y(z) \quad = \\ (II) & : & \hat{y}(t+2|t) \quad = \\ (III) & : & \mathrm{Var}\left(\hat{y}(t+2|t) - y(t+2)\right) \quad = \end{array}\right.$$

Esercizio 2.

Risultati:
$$\left[\begin{array}{lll} (I) & : & \text{Stimatori non polarizzati} \quad = \\ (II) & : & \left[\begin{array}{rl} \hat{\theta}_{LS} & = \\ \mathrm{Var}(\hat{\theta}_{LS}) & = \end{array}\right. \\ (III) & : & \left[\begin{array}{rl} \hat{\theta}_{GM} & = \\ \mathrm{Var}(\hat{\theta}_{GM}) & = \end{array}\right. \\ (IV) & : & \left[\begin{array}{rl} \hat{\theta}_{ML} & = \\ \mathrm{Var}(\hat{\theta}_{ML}) & = \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Esercizio 3.

Risultati:
$$\left[\begin{array}{lll} (I) & : & \left[\begin{array}{rl} \mathrm{E}[X] & = \\ \mathrm{Var}(X) & = \end{array}\right. \\ (II) & : & \left[\begin{array}{rl} \mathrm{E}[Z] & = \\ \mathrm{Var}(Z) & = \end{array}\right. \\ (III) & : & \quad f_Z(z) \quad = \end{array}\right.$$

Esercizio 4.

Risultati:
$$\left[\begin{array}{lll} (I) & : & \left[\begin{array}{rl} \text{Tipo del processo } y(t) & : \\ y(t) & = \end{array}\right. \\ (II) & : & \Phi_r(z) = \end{array}\right.$$