

**Esercizio 1.**

- I) Quale delle curve  $\gamma_i(\omega)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , rappresentate in Fig. 1, può essere interpretata come la densità spettrale  $\Phi_y(e^{j\omega})$  di un processo stocastico stazionario  $y(t)$  a tempo discreto? Perché?
- II) Calcolare la varianza  $R_y(0)$  del processo  $y(t)$ .

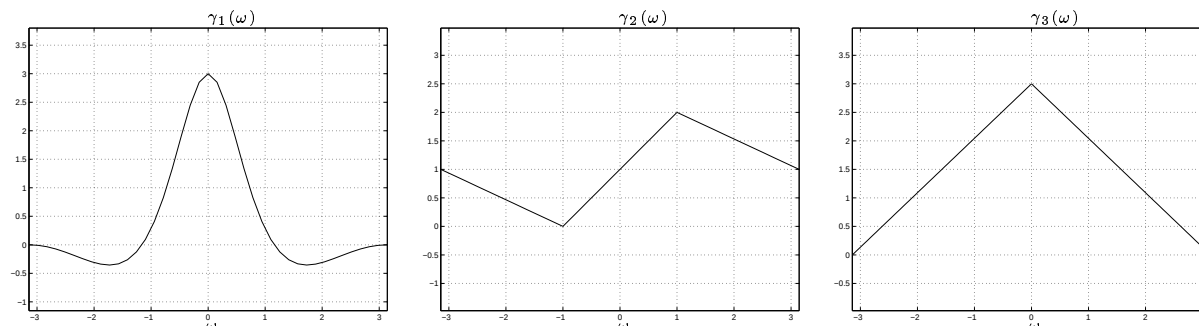


Figura 1.

**Esercizio 2.**

Si consideri il seguente processo stocastico tempo discreto:

$$y(t) = 0.3y(t-1) + e(t) + 0.6e(t-1)$$

dove  $e(t)$  è un rumore bianco con media nulla e varianza  $\sigma_e^2 = 2$ .

- I) Calcolare la funzione di trasferimento  $G(z)$  da  $e(t)$  a  $y(t)$ .
- II) Spiegare perché  $y(t)$  è un processo stocastico asintoticamente stazionario.
- III) Calcolare il valore atteso  $E[y(t)]$  e la funzione di covarianza  $R_y(\tau)$  del processo  $y(t)$  a regime.
- IV) Calcolare lo spettro  $\Phi_y(z)$  e la densità spettrale  $\Phi_y(e^{j\omega})$  del processo  $y(t)$ .

**Esercizio 3.**

Siano  $\mathbf{y}_1$  e  $\mathbf{y}_2$  due variabili aleatorie indipendenti, aventi densità di probabilità

$$f_{\mathbf{y}_1}(y_1) = \begin{cases} \theta e^{-\theta y_1} & y_1 \geq 0 \\ 0 & y_1 < 0 \end{cases}$$

$$f_{\mathbf{y}_2}(y_2) = \begin{cases} 2\theta e^{-2\theta y_2} & y_2 \geq 0 \\ 0 & y_2 < 0 \end{cases}$$

con  $\theta$  parametro incognito positivo. Siano  $\bar{y}_1, \bar{y}_2$  le osservazioni disponibili di  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ .

- I) Determinare la stima a massima verosimiglianza  $\hat{\theta}_{MV}$  di  $\theta$ , basata sulle osservazioni  $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ .

**Esercizio 4.**

Si consideri il processo stocastico tempo discreto  $y(t)$  generato come rappresentato in Fig. 2, dove  $e(t)$ ,  $v(t)$  sono due rumori bianchi scorrelati.

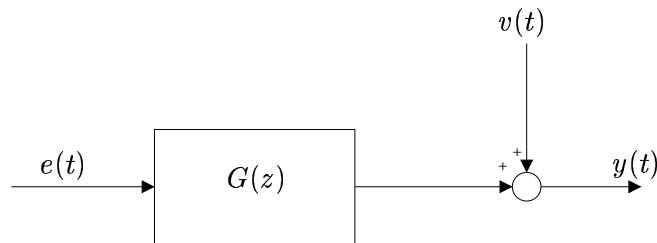


Figura 2.

Dati:

- $e \sim WN(0, \sigma_e^2 = \frac{9}{7})$
- $v \sim WN(0, \sigma_v^2 = \frac{48}{7})$
- $G(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$

I) Determinare l'equazione del predittore lineare ottimo a due passi in avanti, che consenta di calcolare la predizione  $\hat{y}(t+2|t)$ .

II) Calcolare la varianza dell'errore di predizione.

Candidato:.....

Risultati.

**Esercizio 1 :** 
$$\begin{cases} (I) & : \quad \Phi_y(e^{j\omega}) = \\ (II) & : \quad R_y(0) = \end{cases}$$

**Esercizio 2 :** 
$$\begin{cases} (I) & : \quad G(z) = \\ (III) & : \quad \begin{cases} E[y(t)] = \\ R_y(\tau) = \end{cases} \\ (IV) & : \quad \begin{cases} \Phi_y(z) = \\ \Phi_y(e^{j\omega}) = \end{cases} \end{cases}$$

**Esercizio 3 :** 
$$[ (I) : \hat{\theta}_{MV} =$$

**Esercizio 4 :** 
$$\begin{cases} (I) & : \quad \hat{y}(t+2|t) = \\ (II) & : \quad \mathbf{Var}(\hat{y}(t+2|t) - y(t+2)) = \end{cases}$$