Prova intermedia di IDENTIFICAZIONE E ANALISI DEI DATI del 23.11.2004

Candidato: ....

Esercizio 1.
L'evoluzione temporale della posizione di un veicolo caratterizzato da moto rettilineo uniforme è descritta dall'equazione

$$x(t) = x^0 + vt,$$

dove x^0 indica la posizione iniziale del veicolo (all'istante $t = 0$) e v la sua velocità. Un sensore di prossimità misura la posizione del veicolo in tre diversi istanti di tempo:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(1) &= 1.9 \\ \tilde{x}(2) &= 6.2 \\ \tilde{x}(3) &= 9.5 \end{aligned}$$

dove $\tilde{x}(i)$ rappresenta il valore assunto dalla misura presa all'istante $t = i$. Si supponga che le osservazioni $\tilde{x}(i)$ siano corrotte da rumori additivi ε_i, modellabili come variabili aleatorie indipendenti, a media nulla e siano $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 2$, $\sigma_3^2 = 2$ le varianze degli errori di misura $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$, rispettivamente. Sulla base delle misure osservate $\tilde{x}(i)$, $i = 1, 2, 3$

I) calcolare la stima ai minimi quadrati $[\hat{x}^0_{LS} \quad \hat{v}_{LS}]'$ della posizione iniziale e della velocità del veicolo;

II) calcolare la stima di Gauss-Markov $[\hat{x}^0_{GM} \quad \hat{v}_{GM}]'$ della posizione iniziale e della velocità del veicolo;

III) calcolare la varianza dell'errore di stima relativo alla posizione iniziale del veicolo $E[(x^0 - \hat{x}^0)^2]$, per le stime ottenute ai punti precedenti.

Esercizio 2.
Si considerino i processi stocastici $y(t)$ descritti dalle seguenti equazioni

a) $y(t) - 4\,y(t-1) = e(t)$

b) $y(t) + \frac{2}{3}\,y(t-1) = 2\,e(t)$

c) $y(t) = e(t) - 25\,e(t-2)$

d) $y(t) = e(t) + t^3\,e(t-1)$

in cui $e(t)$ è un processo stocastico bianco, a media nulla e varianza unitaria.

I) Dire quali processi sono asintoticamente stazionari e quali no, motivando la risposta.

II) Per ciascun processo asintoticamente stazionario, calcolare la funzione di covarianza $R_y(\tau)$.

III) Per ciascun processo asintoticamente stazionario, determinare il fattore canonico spettrale $H(z)$ e la relativa varianza del processo bianco in ingresso σ_w^2.

Esercizio 3.
Si consideri il processo stocastico $y(t)$ descritto dall'equazione

$$y(t) - 0.2\,y(t-1) = e(t) + 0.8\,e(t-1)$$

dove $e(t)$ è un processo stocastico bianco, a media nulla e varianza pari a $\sigma_e^2 = 1$.

I) Determinare la funzione di covarianza $R_y(\tau)$ di $y(t)$, per $\tau = 0, 1, 2$.

II) Determinare l'equazione del predittore ottimo LMEQM a due passi in avanti $\hat{y}(t+2|t)$ per il processo stocastico $y(t)$, ed il relativo errore quadratico medio di predizione:
$EQM = E\left[\{y(t+2) - \hat{y}(t+2|t)\}^2\right]$.

III) Determinare il predittore ottimo FIR di ordine 0, a due passi in avanti $\hat{y}_{FIR_0}(t+2) = g_0\,y(t)$ e calcolare il relativo errore quadratico medio di predizione:
$EQM_{FIR_0} = E\left[\{y(t+2) - \hat{y}_{FIR_0}(t+2)\}^2\right]$.
Calcolare inoltre la riduzione di EQM che si ottiene utilizzando il predittore ottimo lineare calcolato al punto II, rispetto al predittore FIR di ordine 0.

Esercizio 4.
Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie con densità di probabilità congiunta

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{9}y & y \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

I) Calcolare il valore atteso $E[\boldsymbol{y}]$ e la varianza $\mathrm{Var}\{\boldsymbol{y}\}$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$.

II) Supponendo di disporre di una osservazione y della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$, calcolare la stima di $\boldsymbol{x}$ a minimo errore quadratico medio, $\hat{\boldsymbol{x}}_{MEQM}$, basata sull'osservazione y.

III) Supponendo di disporre di una osservazione y della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$, calcolare la stima di $\boldsymbol{x}$ lineare a minimo errore quadratico medio, $\hat{\boldsymbol{x}}_{LMEQM}$, basata sull'osservazione y.