Prova intermedia di IDENTIFICAZIONE E ANALISI DEI DATI del 18.11.2003

Candidato: ....

Esercizio 1.
Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie con densità di probabilità congiunta

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Calcolare il valore atteso $E[\boldsymbol{y}]$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$.

b) Determinare la funzione di densità di probabilità di $\boldsymbol{x}$ condizionata a $\boldsymbol{y}$, $f_{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}}(x|y)$.

c) Supponendo di disporre di una osservazione y della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$, calcolare la stima di $\boldsymbol{x}$ a minimo errore quadratico medio, $\hat{\boldsymbol{x}}_{MEQM}$, basata sull'osservazione y.

d) Supponendo di disporre di una osservazione y della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$, calcolare la stima di $\boldsymbol{x}$ lineare a minimo errore quadratico medio, $\hat{\boldsymbol{x}}_{LMEQM}$, basata sull'osservazione y.

Esercizio 2.
Si consideri il sistema rappresentato in Figura 1. Si assuma che $e(t)$ e $v(t)$ siano processi stocastici

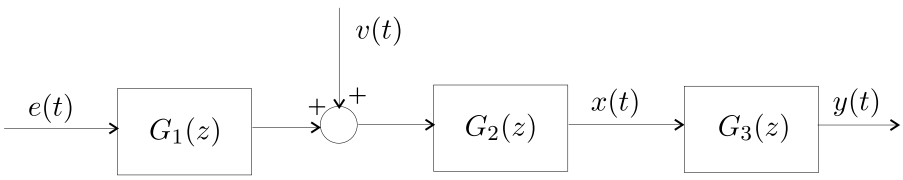

Figura 1.

bianchi, a media nulla, tra loro indipendenti, di varianza rispettivamente $\sigma_e^2 = 1$ e $\sigma_v^2 = 20$, e

$$G_1(z) = \frac{1}{1 - 0.2\,z^{-1}} \quad , \quad G_2(z) = 1 - 0.2\,z^{-1}.$$

a) Calcolare lo spettro $\phi_x(z)$ del processo stocastico $x(t)$.

b) Determinare un modello del processo stocastico $x(t)$ (MA, AR o ARMA) e scriverne l'equazione alle differenze finite, specificando la varianza del processo bianco in ingresso.

c) Assumendo $G_3(z) = \dfrac{3}{4z^2 - 1}$, determinare un modello del processo stocastico $y(t)$ (MA, AR o ARMA) e scriverne l'equazione alle differenze finite, specificando la varianza del processo bianco in ingresso.

d) Determinare la funzione di trasferimento $G_3(z)$ in modo tale che il processo $y(t)$ sia un processo bianco di varianza unitaria.

Esercizio 3.
Si consideri il processo stocastico $y(t)$, definito dall'equazione

$$y(t) = \frac{1}{2}\, y(t-2) + e(t-1)$$

dove $e(t)$ è un processo bianco, a media nulla, di varianza pari a 4.

a) Calcolare la funzione di covarianza $R_y(\tau)$ del processo $y(t)$, per ogni intero τ.

b) Calcolare lo spettro $\phi_y(z)$ del processo $y(t)$.

c) Determinare l'equazione del predittore ottimo lineare MEQM a tre passi in avanti $\hat{y}(t+3|t)$ per il processo stocastico $y(t)$, ed il relativo errore quadratico medio di predizione $EQM = E\left[\{y(t+3) - \hat{y}(t+3|t)\}^2\right]$.

d) Supponendo che $e(t)$ sia un processo MA definito dall'equazione

$$e(t) = w(t) - \frac{1}{2} w(t-1)$$

con $w(t)$ bianco, a media nulla e varianza unitaria, determinare l'equazione del predittore ottimo lineare MEQM a tre passi in avanti $\hat{y}(t+3|t)$ per il processo stocastico $y(t)$, ed il relativo errore quadratico medio di predizione $EQM = E\left[\{y(t+3) - \hat{y}(t+3|t)\}^2\right]$.

Esercizio 4.
Si consideri la variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$, la cui funzione di distribuzione della probabilità è rappresentata in Figura 2.

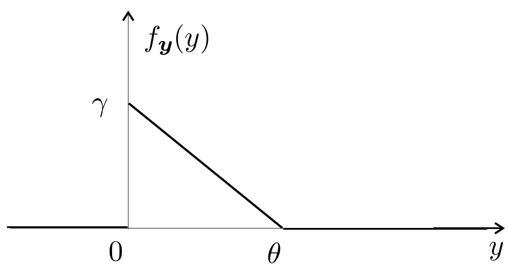

Figura 2.

a) Determinare il valore di γ, in funzione del parametro θ, affinchè $f_{\boldsymbol{y}}(y)$ sia effettivamente una funzione di distribuzione della probabilità.

b) Utilizzando l'espressione di γ calcolata al punto a), determinare la stima a massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{MV}$ del parametro θ, basata su una osservazione y della variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$, e calcolarne l'errore di polarizzazione.

c) Determinare uno stimatore $\hat{\theta}$ di θ, non polarizzato.

d) Calcolare la varianza dell'errore di stima, relativo allo stimatore $\hat{\theta}$ calcolato al punto c).