Prova scritta di IDENTIFICAZIONE E ANALISI DEI DATI del 13.12.2005

Esercizio 1.

Sia θ un parametro incognito, sul quale vengono effettuate quattro misure

$$\begin{aligned} y_1 &= \theta + v_1 \\ y_2 &= 2\theta + v_2 \\ y_3 &= 4\theta + v_3 \\ y_4 &= 8\theta + v_4 \end{aligned}$$

dove gli errori di misura v_i, $i = 1, \ldots, 4$, sono modellati come variabili aleatorie indipendenti, a media nulla e varianza unitaria.

a) Si considerino i seguenti stimatori del parametro θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \qquad \hat{\theta}_2 = \frac{y_3}{4}, \qquad \hat{\theta}_3 = \frac{4y_2 + y_4}{16}, \qquad \hat{\theta}_4 = y_4 .$$

Indicare quali sono gli stimatori corretti e per ciascuno di essi calcolare la varianza dell'errore di stima $E[(\hat{\theta}_i - \theta)^2]$.

b) Determinare lo stimatore di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ basato sulle misure y_1, y_2, y_3, y_4, e la corrispondente varianza dell'errore di stima $E[(\hat{\theta}_{GM} - \theta)^2]$.

c) Supponendo ora di poter utilizzare solo due delle quattro misure a disposizione, individuare le misure da scegliere per costruire lo stimatore lineare $\hat{\theta}_L$ con la minima varianza dell'errore di stima. Riportare l'espressione di $\hat{\theta}_L$ e la varianza $E[(\hat{\theta}_L - \theta)^2]$.

d) Supponendo di disporre della sola misura y_4 e assumendo che la distribuzione della variabile aleatoria v_4 sia pari a

$$f_{v_4}(v) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - v^2) & \text{se } -1 \leq v \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

determinare lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{MV}$ di θ basato sulla misura y_4 e dire se tale stimatore è corretto o polarizzato.

Esercizio 2.

Si consideri un processo stocastico stazionario $y(k)$, il cui spettro è pari a

$$\Phi_y(z) = 3z^{-4} + 10 + 3z^4.$$

a) Determinare una possibile equazione alle differenze per il processo $y(k)$, specificando il valore della varianza σ_e^2 del processo bianco in ingresso $e(k)$.

b) Determinare l'equazione alle differenze del predittore ottimo lineare MEQM a tre passi in avanti $\hat{y}(k + 3|k)$ per il processo stocastico $y(k)$, ed il relativo errore quadratico medio di predizione $EQM = E\left[\{y(k + 3) - \hat{y}(k + 3|k)\}^2\right]$.

c) Determinare la funzione di covarianza $R_y(\tau)$ del processo $y(k)$, per ogni $\tau \geq 0$.

d) Si assuma ora che il processo $y(k)$ sia l'ingresso di un sistema lineare avente come uscita un nuovo processo stocastico $x(k)$, e come funzione di trasferimento da y a x

$$G(z) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \ .$$

Determinare l'equazione alle differenze del predittore ottimo lineare MEQM a tre passi in avanti $\hat{x}(k+3|k)$ per il processo stocastico $x(k)$, ed il relativo errore quadratico medio di predizione $EQM = E\left[\{x(k+3) - \hat{x}(k+3|k)\}^2\right]$.

Esercizio 3.
Il file `Dati#.mat` (in cui `#` rappresenta il numero progressivo assegnato a ciascun candidato), presente nella cartella:
`//sunto/netws/Didattica/identificazione/dati`
contiene due sequenze di dati `u` e `y`, relative rispettivamente al segnale di ingresso e di uscita di un esperimento effettuato su un sistema lineare incognito. I dati sono campionati con tempo di campionamento `Tc`, contenuto anch'esso nel file di cui sopra.

a) Utilizzando la prima metà dei campioni disponibili per la stima dei parametri e la restante metà per la validazione dei modelli identificati, determinare il miglior modello ARX per il sistema incognito in base al criterio MDL per la selezione ottima dell'ordine. Riportare la struttura del modello così ottenuto. Valutare la qualità del modello in base a: i) analisi dei residui; ii) analisi della mappa poli-zeri.

b) Prendendo ora in considerazione diverse classi di modelli OE, ARMAX e BJ, determinare un modello adatto a descrivere il sistema incognito, tale che: i) sia accettabile in base alle tecniche di validazione studiate; ii) abbia il minor numero possibile di parametri. Riportare la struttura del modello identificato, le funzioni di trasferimento $G(z)$ e $H(z)$, i poli della funzione di trasferimento $G(z)$, e il FIT percentuale in simulazione del modello stesso.

c) Utilizzando il modello scelto in risposta al punto b), determinare una stima del guadagno stazionario del sistema incognito (cioè il valore di regime raggiunto da $y(t)$ in corrispondenza di un ingresso $u(t)$ a gradino unitario), del picco in frequenza (ovvero del valore massimo del modulo della risposta in frequenza, espresso in dB) e delle pulsazione a cui tale massimo è raggiunto (in rad/sec).

Per ogni punto riportare, in maniera sintetica, il procedimento seguito. Salvare la propria sessione di identificazione in formato `ident`, nel file `CognomeNome.sid` (sostituendo ovviamente il proprio nome e cognome!), e - **solo al termine dello svolgimento** - copiarlo nella cartella:
`sunto/home/compiti/iead`