

Esercizio 1.

Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due variabili aleatorie con densità di probabilità congiunta

$$f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta^3}(x + 3y) & 0 \leq x \leq \theta, \quad 0 \leq y \leq \theta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove θ è un parametro reale.

- Assumendo $\theta = 1$, determinare il valore atteso $E[\mathbf{x}]$ della variabile aleatoria $\mathbf{x}$.
- Assumendo $\theta = 1$ e supponendo di disporre di una osservazione y della variabile aleatoria $\mathbf{y}$, calcolare la stima di $\mathbf{x}$ a minimo errore quadratico medio, $\hat{\mathbf{x}}_{MEQM}$, basata sull'osservazione y .
- Supponendo di disporre di una osservazione y della variabile aleatoria $\mathbf{y}$, calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{MV}$ del parametro θ basato su tale misura. Determinare se tale stimatore è corretto o polarizzato.
- Supponendo ora di disporre di due osservazioni x e y delle variabili aleatorie $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{MV}$ del parametro θ , basato sulle due misure disponibili.

Esercizio 2.

Si consideri lo schema a blocchi riportato in Figura 1. Si assuma che $e_1(k)$ e $e_2(k)$ siano processi stocastici bianchi tra loro indipendenti, a media nulla e di varianza pari rispettivamente a $\sigma_1^2 = 1$ e $\sigma_2^2 = \frac{4}{3}$, e che: $G(z) = 1 + z^{-1}$, $H(z) = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}$.

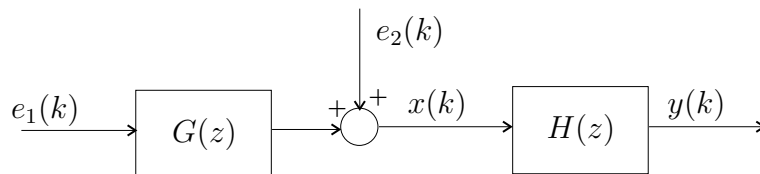


Figura 1.

- Determinare l'equazione alle differenze del processo stocastico $x(k)$ e calcolarne la funzione di covarianza $R_x(\tau)$, per ogni $\tau \geq 0$.
- Determinare lo spettro $\Phi_y(z)$ del processo $y(k)$.
- Determinare l'equazione alle differenze del predittore ottimo lineare MEQM a due passi in avanti $\hat{y}(k+2|k)$ per il processo stocastico $y(k)$, ed il relativo errore quadratico medio di predizione $EQM = E[\{y(k+2) - \hat{y}(k+2|k)\}^2]$.
- Si assuma ora che il processo $e_1(k)$ abbia le stesse caratteristiche assunte in precedenza, e che $e_2(k)$ sia un processo stocastico incognito, indipendente da $e_1(k)$. Determinare l'equazione alle differenze del processo $e_2(k)$ in modo che $y(k)$ sia un processo AR(1). Riportare l'equazione alle differenze del processo $y(k)$ così ottenuto.

Esercizio 3.

Il file `Dati#.mat` (in cui `#` rappresenta il numero progressivo assegnato a ciascun candidato), presente nella cartella: `//sunto/netws/Didattica/identificazione/dati`, contiene due sequenze di dati `u` e `y`, relative rispettivamente al segnale di ingresso $u(t)$ e di uscita $y(t)$ di un esperimento effettuato sul sistema lineare rappresentato in Figura 2. I dati sono campionati con tempo di campionamento T_c , contenuto anch'esso nel file.

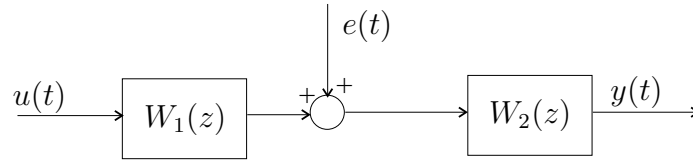


Figura 2.

Riguardo al sistema, sono disponibili le seguenti informazioni a priori:

- $e(t)$ è un processo stocastico indipendente da $u(t)$, le cui proprietà statistiche non sono note;
 - $W_1(z) = 3z^{-1} + 2z^{-2}$;
 - $W_2(z) = \frac{1}{A(z)}$, dove $A(z) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}$ è un polinomio incognito.
- a) Utilizzando la prima metà dei campioni disponibili per la stima dei parametri e la restante metà per la validazione dei modelli identificati, determinare il miglior modello ARX per il sistema incognito in base al criterio MDL per la selezione ottima dell'ordine. Riportare la struttura del modello così ottenuto e il FIT percentuale in simulazione del modello stesso. Discutere la qualità del modello in base a: i) analisi dei residui; ii) analisi della mappa poli-zeri; iii) conoscenza a priori relativa al sistema in esame.
- b) In base al modello ottenuto al punto a), fornire una stima dell'ordine n del polinomio $A(z)$ e dei poli della funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$.
- c) Prendendo ora in considerazione diverse classi di modelli ARMAX e OE, determinare se esistono modelli in grado di descrivere il sistema incognito in modo significativamente migliore del modello ottenuto al punto a). Giustificare la risposta in base alle tecniche di validazione studiate e alle informazioni disponibili relative al sistema.
- d) Utilizzando il modello ritenuto più adatto a descrivere il sistema, tra quelli identificati ai punti a) e c), determinare una stima del guadagno stazionario del sistema incognito (cioè il valore di regime raggiunto da $y(t)$ in corrispondenza di un ingresso $u(t)$ a gradino unitario). Determinare inoltre un possibile modello per il processo stocastico $e(t)$, in base al modello identificato per il sistema complessivo.

Per ogni punto riportare, in maniera sintetica, il procedimento seguito. Salvare la propria sessione di identificazione in formato `ident`, nel file `CognomeNome.sid` (sostituendo ovviamente il proprio nome e cognome!), e - **solo al termine dello svolgimento** - copiarlo nella cartella: `//sunto/home/compiti/iead`