

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SIENA  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA



Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

***CONTROLLO MULTIVARIABILE  
ROBUSTO E NONLINEARE***

**Docente:**  
Prof. Ing. Antonio Vicino

# Indice

<b>1</b>	<b>Stabilizzazione</b>	<b>3</b>
1.1	Parametrizzazione dei controllori stabilizzanti . . . . .	4
1.1.1	Caso particolare: $P(s)$ stabile . . . . .	5
1.1.2	Caso generale: $P(s)$ instabile . . . . .	6
1.2	Stabilizzazione forte . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Sistemi multivariabili: zeri e poli</b>	<b>17</b>
2.1	Notazione di base . . . . .	17
2.2	Forma di Smith-McMillan di una matrice di f.d.t. . . . .	18
2.3	Poli e zeri di una matrice di f.d.t. . . . .	23
2.4	Rappresentazione di una matrice di f.d.t. . . . .	25
2.5	Realizzazione nello spazio di stato di una MFD . . . . .	28
2.6	Numero degli zeri di una matrice di f.d.t. . . . .	28
<b>3</b>	<b>La stabilità nei sistemi M.I.M.O. in retroazione</b>	<b>30</b>
3.1	Stabilità interna . . . . .	30
3.2	Il criterio di Nyquist generalizzato . . . . .	33
3.3	Nyquist arrays e bande di Gershgorin . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Prestazioni nei sistemi multivariabili</b>	<b>40</b>
4.1	Guadagni principali e valori singolari . . . . .	40
4.2	Decomposizione ai valori singolari . . . . .	41
4.3	Definizione delle prestazioni di un sistema tramite i guadagni principali . . . . .	44
4.4	Relazione tra i guadagni principali ad anello aperto e chiuso . . . . .	47
4.4.1	Sensitività . . . . .	47
4.4.2	Propagazione del rumore di misura . . . . .	47
4.4.3	Inseguimento del riferimento . . . . .	48
4.5	Guadagni principali e luoghi caratteristici . . . . .	48
4.6	Norme degli operatori: norma $H_2$ e norma $H_\infty$ . . . . .	50
4.7	Uso delle norme degli operatori come indici di prestazione . . . . .	52

<b>5</b>	<b>Robustezza dei sistemi multivariabili</b>	<b>53</b>
5.1	Rappresentazione dell'incertezza . . . . .	53
5.1.1	Incertezza non strutturata . . . . .	53
5.1.2	Incertezza strutturata . . . . .	54
5.2	Stabilità robusta . . . . .	56
5.2.1	Incertezza non strutturata . . . . .	56
5.3	Incertezza strutturata . . . . .	59
5.4	Prestazioni robuste . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Controllo Nonlineare</b>	<b>63</b>
6.1	Stabilità assoluta . . . . .	63
6.2	Funzioni razionali reali positive . . . . .	66
6.3	Il Lemma di Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) o della Positive Realness (PR) . . . . .	68
6.4	Criterio del cerchio . . . . .	69
6.5	Criterio di Popov . . . . .	73

# Capitolo 1

## Stabilizzazione

Dato lo schema di controllo in retroazione di figura 1.1, in cui  $P(s)$  rappresenta l'impianto supposto noto, il problema della stabilizzazione consiste nel determinare, se esiste, il controllore  $C(s)$  tale che il sistema globale sia internamente stabile. Al fine degli sviluppi successivi, ipotizzeremo che  $P(s)$  sia strettamente proprio e  $C(s)$  sia vincolato ad essere proprio.

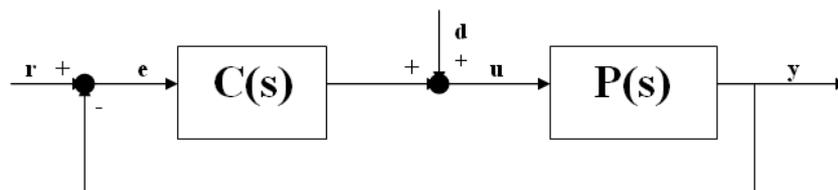


Figura 1.1: Sistema in retroazione

Prima di risolvere il problema, richiamiamo la definizione di stabilità interna di un sistema in retroazione.

Nello schema di figura 1.2, supponiamo che  $P(s)$  sia strettamente propria e  $C(s)$  e  $F(s)$  siano proprie. Consideriamo le relazioni tra gli ingressi esogeni  $r, d, n$  e gli ingressi  $x_1, x_2$  e  $x_3$  ai tre blocchi. Si può facilmente verificare che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & F(s) \\ -C(s) & 1 & 0 \\ 0 & -P(s) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$$

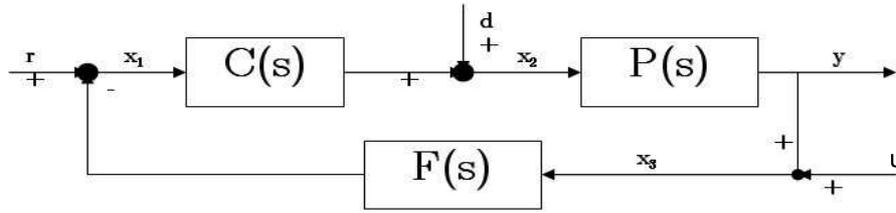


Figura 1.2: Sistema in retroazione

ovvero:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{1 + P(s)C(s)F(s)} \begin{bmatrix} 1 & -P(s)F(s) & -F(s) \\ C(s) & 1 & -C(s)F(s) \\ P(s)C(s) & P(s) & 1 \end{bmatrix}}_{G(s)} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Sotto le ipotesi introdotte su  $C(s)$ ,  $F(s)$  e  $P(s)$  il sistema è ben posto, in altri termini  $|1 + P(s)C(s)F(s)|$  non è identicamente nullo, inoltre tutte le funzioni di trasferimento  $G_{ij}$  sono proprie. Il sistema si dice *internamente stabile* se tutte le 9 funzioni di trasferimento che compaiono nella (1.1) sono stabili.

## 1.1 Parametrizzazione dei controllori stabilizzanti

Il problema della sintesi di un controllore che permetta al sistema controllato di garantire certe specifiche di prestazione, può essere affrontato in due passi successivi:

1. Parametrizzare tutti i  $C(s)$  che stabilizzano  $P(s)$ .
2. Nella famiglia dei  $C(s)$  stabilizzanti così trovata, verificare se esiste un controllore per cui le specifiche di prestazione sono effettivamente rispettate

Nel seguito di questo capitolo verrà data una soluzione al primo problema supponendo di considerare sistemi S.I.S.O. e  $F(s) = 1$  (**controllo ad un grado di libertà**). E' da

notare che una soluzione analoga a quella presentata, ma in forma matriciale, può essere ottenuta per il caso M.I.M.O.

Sia  $\mathfrak{R}$  l'insieme delle funzioni reali, razionali, proprie e stabili. L'insieme  $\mathfrak{R}$  è chiuso sotto l'operazione di addizione e moltiplicazione. Poichè inoltre  $1 \in \mathfrak{R}$  allora  $\mathfrak{R}$  *costituisce un anello commutativo con identità*

### 1.1.1 Caso particolare: $P(s)$ stabile

Con riferimento allo schema di figura 1.1, possiamo enunciare il seguente teorema:

**Teorema 1** - Sia  $P \in \mathfrak{R}$ . L'insieme di tutti i  $C(s)$  per cui il sistema è internamente stabile è dato da:

$$\left\{ \frac{Q(s)}{1 - P(s)Q(s)} : Q(s) \in \mathfrak{R} \right\}$$

--

#### *Dimostrazione*

$\Leftarrow$  Si vuole dimostrare che se  $C(s)$  stabilizza internamente il sistema, allora:

$$\exists Q(s) \in \mathfrak{R} : C(s) = \frac{Q(s)}{1 - P(s)Q(s)}$$

– Sia  $Q(s)$  la funzione di trasferimento da  $r$  ad  $u$ :

$$Q(s) = \frac{C(s)}{1 + P(s)C(s)} \quad (1.2)$$

Per ipotesi,  $Q(s) \in \mathfrak{R}$ , ed inoltre dalla (1.2) si ottiene proprio:

$$C(s) = \frac{Q(s)}{1 - P(s)Q(s)}$$

*C.V.D.*

$\Rightarrow$  Si vuole dimostrare che se  $Q(s) \in \mathfrak{R}$  allora  $C(s) \doteq \frac{Q(s)}{1-P(s)Q(s)}$  stabilizza internamente il sistema

– Sostituendo l'espressione di  $C(s)$  nella (1.1) con  $F(s) = 1$  si ottiene:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 - P(s)Q(s) & -P(s)(1 - P(s)Q(s)) & -(1 - P(s)Q(s)) \\ Q(s) & 1 - P(s)Q(s) & -Q(s) \\ P(s)Q(s) & P(s)(1 - P(s)Q(s)) & 1 - P(s)Q(s) \end{bmatrix} \Rightarrow G_{ij}(s) \in \mathfrak{R}$$

C.V.D.

■

**Osservazione 1** - Tutte le  $G_{ij}(s)$  sono affini in  $Q(s)$ , cioè sono del tipo  $T_1(s) + T_2(s)Q(s)$ ,  $T_1(s), T_2(s) \in \mathfrak{R}$ . In particolare:

$$\begin{cases} S(s) = 1 - P(s)Q(s) \\ T(s) = P(s)Q(s) \end{cases}$$

Un esempio di applicazione è dato dalle famiglie di controllori che garantiscono l'inseguimento del gradino.

### 1.1.2 Caso generale: $P(s)$ instabile

Prima di passare alla soluzione del problema per  $P(s)$  instabile, è necessario introdurre la *fattorizzazione coprime* di una funzione di trasferimento.

#### Fattorizzazioni coprime

Supponiamo che  $P(s)$  non sia stabile. Consideriamo la seguente fattorizzazione di  $P(s)$ :

$$P(s) = \frac{n(s)}{m(s)}, \quad (1.3)$$

dove  $n(s)$  e  $m(s)$  sono polinomi coprimi (cioè non ammettono fattori comuni).

E' possibile trovare due polinomi  $x(s)$  e  $y(s)$  tali che:

$$n(s)x(s) + m(s)y(s) = 1. \quad (1.4)$$

Scegliendo poi:

$$C(s) = \frac{x(s)}{y(s)}, \quad (1.5)$$

si può fare in modo che il polinomio caratteristico  $\Delta(s)$  sia identicamente uguale a 1:

$$\Delta(s) \equiv 1 \Rightarrow \text{Sistema internamente stabile.}$$

L'equazione (1.4) è nota in letteratura come *equazione diofantina*, e la sua soluzione in generale è stata studiata sin da tempi remoti.

### Esempio

$$P(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \begin{cases} n(s) = 1 \\ m(s) = s \end{cases}$$

Si può scegliere  $x(s) = 1$ ,  $y(s) = 0$  ma in questo caso  $\frac{x(s)}{y(s)}$  non è definito. Si potrebbero scegliere:

$$x(s) = -s + 1; y(s) = 1 \Rightarrow C(s) = \frac{-s + 1}{1},$$

ottenendo però un controllore  $C(s)$  non proprio.

•

Per trovare una fattorizzazione  $P(s)$  che conduca ad un controllore proprio e quindi realizzabile bisogna imporre che  $N(s), M(s), X(s)$  e  $Y(s)$  siano tutti elementi di  $\mathfrak{R}$  anzichè polinomi. Due funzioni  $N(s), M(s) \in \mathfrak{R}$  si dicono ***coprime*** se esistono altre due funzioni  $X(s), Y(s) \in \mathfrak{R}$  tali che

$$N(s)X(s) + M(s)Y(s) = 1 \quad (1.6)$$

**Osservazione 2** - *Affinchè valga la (1.6), le funzioni  $N(s)$  e  $M(s)$  non devono avere zeri in comune nel semipiano  $Re[s] \geq 0$  o per  $s = \infty$ . Si può dimostrare che questa condizione è anche sufficiente perchè  $N(s)$  e  $M(s)$  siano coprime.*

Sia  $G(s)$  una funzione di trasferimento razionale. La rappresentazione:

$$G(s) = \frac{N(s)}{M(s)}, \begin{cases} N(s), M(s) \in \mathfrak{R} \\ N(s), M(s) \text{coprime} \end{cases}$$

si chiama **fattorizzazione coprime di  $G(s)$  su  $\mathfrak{R}$**

Il problema che si pone adesso è quello di costruire 4 funzioni appartenenti ad  $\mathfrak{R}$  tali che valgano le due condizioni:

$$\begin{cases} G(s) = \frac{N(s)}{M(s)} & (1.7) \\ N(s)X(s) + M(s)Y(s) = 1 & (1.8) \end{cases}$$

Notiamo subito che costruire  $N(s)$  ed  $M(s)$  è facile, ma non lo è altrettanto trovare  $X(s)$  e  $Y(s)$ .

### Esempio

Sia

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)}$$

Per trovare  $N(s)$  e  $M(s)$ , basta dividere numeratore e denominatore per un polinomio comune che non abbia zeri nel semipiano  $Re[s] \geq 0$ , ad esempio  $(s+1)^k$ :

$$\frac{1}{s-1} = \frac{\frac{1}{(s+1)^k}}{\frac{s-1}{(s+1)^k}}$$

La scelta  $k = 1$  risolve il problema. Per  $k > 1$ ,  $N(s)$  ed  $M(s)$  non sarebbero coprimi (avrebbero uno zero in comune in  $s = \infty$ ).

Dunque si ottiene:

$$G(s) = \frac{N(s)}{M(s)} \text{ con } N(s) = \frac{1}{s+1}, M(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

•

Il problema adesso è trovare  $X(s)$  e  $Y(s)$ . Per risolvere questo problema si usa l'**Algoritmo di Euclide**, che permette di trovare il massimo comune divisore di due polinomi  $n(s)$  e  $m(s)$ . Se  $n(s)$  e  $m(s)$  sono coprimi, allora l'algoritmo permette di risolvere l'equazione:

$$n(s)x(s) + m(s)y(s) = 1$$

### Algoritmo di Euclide

Dati  $n(s)$  ed  $m(s)$ , con  $\deg[n(s)] \geq \deg[m(s)]$ , l'algoritmo di Euclide si articola nei seguenti passi:

1. Dividere  $n(s)$  per  $m(s)$ :

$$\frac{n(s)}{m(s)} = q_1(s) + \frac{r_1(s)}{m(s)}$$

$$\Downarrow$$

$$n(s) = m(s)q_1(s) + r_1(s), \text{ dove } \deg[r_1(s)] < \deg[m(s)].$$

2. Dividere  $m(s)$  per  $r_1(s)$ :

$$\frac{m(s)}{r_1(s)} = q_2(s) + \frac{r_2(s)}{r_1(s)}$$

$$\Downarrow$$

$$m(s) = r_1(s)q_2(s) + r_2(s), \text{ dove } \deg[r_2(s)] < \deg[r_1(s)].$$

3. Dividere  $r_1(s)$  per  $r_2(s)$ :

$$\frac{r_1(s)}{r_2(s)} = q_3(s) + \frac{r_3(s)}{r_2(s)}$$

$$\Downarrow$$

$$r_1(s) = r_2(s)q_3(s) + r_3(s), \text{ dove } \deg[r_3(s)] < \deg[r_2(s)].$$

$$\vdots$$

L'algoritmo prosegue iterativamente finchè al  $k$ -esimo passo si trova:

$$r_k(s) = \text{costante} \neq 0 \Rightarrow \deg[r_k(s)] = 0.$$

Supponiamo che l'algoritmo termini al passo  $k = 3$ . Allora si ha:

$$\begin{aligned} n(s) &= m(s)q_1(s) + r_1(s) \\ m(s) &= r_1(s)q_2(s) + r_2(s) \\ r_1(s) &= r_2(s)q_3(s) + r_3 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_2(s) & 1 & 0 \\ -1 & q_3(s) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1(s) \\ r_2(s) \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -q_1(s) \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n(s) \\ m(s) \end{bmatrix}$$

Esprimiamo  $r_3$  in funzione di  $q_i(s)$ ,  $n(s)$  ed  $m(s)$ :

$$r_3 = (1 + q_2(s)q_3(s))n(s) + (-q_3(s) - q_1(s)(1 + q_2(s)q_3(s)))m(s)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{1}{r_3}[1 + q_2(s)q_3(s)] \\ y(s) &= \frac{1}{r_3}[-q_3(s) - q_1(s)(1 + q_2(s)q_3(s))] \end{aligned}$$

### Esercizio

Risolvere l'equazione diofantina (1.4), essendo:

$$n(s) = s^2; \quad m(s) = 6s^2 - 5s + 1$$

$$[\text{Soluzione: } x(s) = -30s + 19; \quad y(s) = 5s + 1]$$

Per fattorizzare una funzione razionale  $G(s)$  si procede come segue:

1. Se  $G(s)$  è stabile:  $N(s) = G(s)$ ,  $M(s) = 1$ ,  $X(s) = 0$  e  $Y(s) = 1$ .
2. Eseguire la trasformazione:

$$G(s) \Rightarrow \tilde{G}(\lambda); \text{ con } s = \frac{1 - \lambda}{\lambda}$$

Scrivere  $\tilde{G}(\lambda)$  come un rapporto di polinomi coprimi:

$$\tilde{G}(\lambda) = \frac{n(\lambda)}{m(\lambda)}$$

3. Applicare l'algoritmo di Euclide per trovare  $x(\lambda)$  e  $y(\lambda)$  tali che:

$$n(\lambda)x(\lambda) + m(\lambda)y(\lambda) = 1$$

4. Applicare a  $n(\lambda)$ ,  $m(\lambda)$ ,  $x(\lambda)$ ,  $y(\lambda)$  la trasformazione inversa:

$$\lambda = \frac{1}{s + 1}.$$

### Esempio

Verificare che:

$$G(s) = \frac{1}{(s - 1)(s - 2)}$$

ammette la seguente fattorizzazione coprima:

$$\begin{aligned} N(s) &= \frac{1}{(s + 1)^2}; & M(s) &= \frac{(s - 1)(s - 2)}{(s + 1)^2} \\ X(s) &= \frac{19s - 11}{s + 1}; & Y(s) &= \frac{s + 6}{s + 1} \end{aligned}$$

•

Possiamo adesso passare alla soluzione del problema della stabilizzazione generale. Sia  $P(s) = \frac{N(s)}{M(s)}$  una fattorizzazione coprima su  $\mathfrak{R}$  e siano  $X(s)$  e  $Y(s)$  funzioni appartenenti ad  $\mathfrak{R}$  che soddisfano l'equazione:

$$N(s)X(s) + M(s)Y(s) = 1.$$

■

Vale il seguente teorema:

**Teorema 2 - (Youla-Kucera)** *L'insieme di tutti i controllori  $C(s)$  per cui il sistema in retroazione è internamente stabile è dato da:*

$$\mathcal{C}_s \triangleq \left\{ C(s) : C(s) = \frac{X(s) + M(s)Q(s)}{Y(s) - N(s)Q(s)} : Q(s) \in \mathfrak{R} \right\}$$

— —

**Osservazione 3** - *Se  $P(s)$  è stabile, dal passo n°1 del procedimento di fattorizzazione si capisce che questa parametrizzazione coincide con quella speciale per  $P(s)$  stabile.*

Il seguente Lemma è utile ai fini della dimostrazione del Teorema 2:

**Lemma 1** - *Sia  $C(s) = \frac{N_c(s)}{M_c(s)}$  una fattorizzazione coprima su  $\mathfrak{R}$  di  $C(s)$ . Allora il sistema di controllo è internamente stabile se e solo se:*

$$(N(s)N_c(s) + M(s)M_c(s))^{-1} \in \mathfrak{R} \tag{1.9}$$

— —

**Dimostrazione**(Teorema 2)

$\Rightarrow$  Si vuole dimostrare che se  $Q(s) \in \mathfrak{R}$  e

$$C(s) \doteq \frac{X(s) + M(s)Q(s)}{Y(s) - N(s)Q(s)}$$

allora il sistema è internamente stabile.

Si definiscano  $N_c(s) \doteq X(s) + M(s)Q(s)$  e  $M_c(s) \doteq Y(s) - N(s)Q(s)$ . Sostituendo

nella (1.9) si ottiene:

$$N(s)N_c(s) + M(s)M_c(s) = N(s)X(s) + M(s)Y(s) = 1$$

$\Downarrow$

$N_c(s)$  e  $M_c(s)$  sono una fattorizzazione coprima di  $C(s)$  e quindi per il Lemma 1 il sistema è internamente stabile.

*C.V.D.*

$\Leftarrow$  Si vuole dimostrare che se  $C(s)$  stabilizza internamente il sistema allora vale

$$C(s) \doteq \frac{X(s) + M(s)Q(s)}{Y(s) - N(s)Q(s)}$$

con  $Q(s) \in \mathfrak{R}$ .

Sia  $C(s) = \frac{N_c(s)}{M_c(s)}$  una fattorizzazione coprima di  $C(s)$  su  $\mathfrak{R}$ . Definiamo:

$$V(s) \doteq (N(s)N_c(s) + M(s)M_c(s))^{-1} \tag{1.10}$$

$\Downarrow$

$$N(s) \underbrace{N_c(s)V(s)} + M(s) \underbrace{M_c(s)V(s)} = 1 \tag{1.11}$$

Dal Lemma 1 segue che  $V(s) \in \mathfrak{R}$ .

Sia  $Q(s)$  la soluzione dell'equazione

$$\underbrace{M_c(s)V(s)} = Y(s) - N(s)Q(s). \tag{1.12}$$

Sostituendo la (1.12) nella (1.11) si ottiene:

$$N(s)N_c(s)V(s) + M(s)(Y(s) - N(s)Q(s)) = 1. \quad (1.13)$$

Peraltro sappiamo anche che:

$$\begin{aligned} N(s)X(s) + M(s)Y(s) &= 1 \\ \Downarrow \\ N(s)X(s) + N(s)M(s)Q(s) - N(s)M(s)Q(s) + M(s)Y(s) &= 1 \\ \Downarrow \\ N(s)[X(s) + M(s)Q(s)] + M(s)[Y(s) - N(s)Q(s)] &= 1. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Confrontando la (1.13) con la (1.14) si ottiene:

$$N_c(s)V(s) = X(s) + M(s)Q(s). \quad (1.15)$$

Pertanto dalla (1.12) e dalla (1.15) si ottiene finalmente:

$$C(s) = \frac{N_c(s)V(s)}{M_c(s)V(s)} = \frac{X(s) + M(s)Q(s)}{Y(s) - N(s)Q(s)}. \quad (1.16)$$

Rimane ora da dimostrare che  $Q(s) \in \mathfrak{R}$ . A tal fine, si moltiplicano la (1.12) e la (1.15) rispettivamente per  $X(s)$  e  $Y(s)$ , e sottraendo membro a membro si ottiene:

$$\begin{aligned} X(s)M_c(s)V(s) &= X(s)Y(s) - X(s)N(s)Q(s) \\ Y(s)N_c(s)V(s) &= Y(s)X(s) + Y(s)M(s)Q(s) \\ \Downarrow \\ (N(s)X(s) + M(s)Y(s))Q(s) &= V(s)(N_c(s)Y(s) - M_c(s)X(s)) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Poichè vale  $((N(s)X(s) + M(s)Y(s)) = 1)$  si ottiene infine:

$$Q(s) = V(s)(N_c(s)Y(s) - M_c(s)X(s)) \in \mathfrak{R}$$

*C.V.D.*

■

**Esercizio**

Sia dato:

$$P(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}$$

Determinare tutti e soli i controllori che stabilizzano  $P(s)$  in retroazione.

**Osservazione 4** - Tutte le funzioni di trasferimento d'anello possono essere espresse come espressioni affini in  $Q$  (ciò si verifica sostituendo la parametrizzazione di Youla nelle funzioni di trasferimento ad anello chiuso). Ad esempio:

$$\begin{aligned} S(s) &= M(s)[Y(s) - N(s)Q(s)] \\ T(s) &= N(s)[X(s) + M(s)Q(s)] \end{aligned}$$

•

**1.2 Stabilizzazione forte**

Un problema di notevole interesse nella teoria del controllo è quello della **stabilizzazione forte**. Si dice che un impianto è stabilizzabile in senso forte, se esiste un controllore **stabile** che stabilizza il sistema in retroazione. Vale il seguente teorema:

**Teorema 3** - L'impianto  $P(s)$  è stabilizzabile in senso forte se e solo se ha un numero pari di poli reali tra ogni coppia di zeri reali in  $\text{Re}[s] \geq 0$ .

**Osservazione 5** - La proprietà stabilita dal Teorema 3 è nota in letteratura come PIP (Parity Interlacing Property).

Del teorema 3 ci si limita a dimostrare la necessarietà, rinviando ad eventuali approfondimenti la dimostrazione della sufficienza.

**Dimostrazione**

⇐ Si vuole dimostrare che se  $P(s)$  è stabilizzabile in senso forte allora vale la PIP.

Supponiamo per assurdo che la condizione di interlacing non sia soddisfatta. Si consideri una fattorizzazione coprime di  $P$ :

$$P(s) = \frac{N(s)}{M(s)} \quad \text{con} \quad N(s)X(s) + M(s)Y(s) = 1 \quad (1.18)$$

ed un controllore stabilizzante:

$$C(s) = \frac{X(s) + M(s)Q(s)}{Y(s) - N(s)Q(s)} \quad \text{con} \quad Q(s) \in \mathfrak{R}$$

Per ipotesi  $\exists z_1, z_2$  di  $N(s)$  ( $Re[z_i] \geq 0$ ) tali da includere un numero dispari di zeri di  $M(s)$ . Allora:

$$M(z_1)M(z_2) < 0$$

e dalla (1.18) si ricava che:

$$M\{z_1\}Y\{z_1\} = M\{z_2\}Y\{z_2\} = 1 \Rightarrow Y(z_1)Y(z_2) < 0$$

Ma vale anche:

$$(Y - NQ)\{z_1\}(Y - NQ)\{z_2\} < 0$$

il che implica che il controllore non è stabile.

*C.V.D.*



# Capitolo 2

## Sistemi multivariabili: zeri e poli

### 2.1 Notazione di base

Si considerano modelli in *matrice di funzioni di trasferimento*:

$$G(s) = \{g_{ij}(s)\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

dove

$$g_{i,j}(s) = \frac{y_i(s)}{u_j(s)}$$

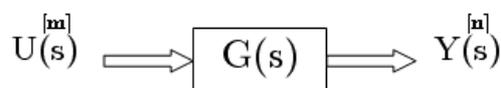


Figura 2.1: Modello in matrice di f.d.t.

Se  $g_{ij}(s)$  è una funzione di trasferimento *razionale propria* (condizione non valida, ad esempio, in presenza di ritardi  $e^{-\tau s}$ ), allora si può trovare una quaterna di matrici  $(A, B, C, D)$  tale che:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y(s) &= Cx + Du. \end{cases}$$

Sappiamo che

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (2.1)$$

La quaterna  $(A, B, C, D)$  si dice una realizzazione di  $G(s)$ . Sappiamo che se  $T$  è invertibile, anche la quaterna  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  tale che:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT; \quad \tilde{B} = T^{-1}B; \quad \tilde{C} = CT; \quad \tilde{D} = D$$

è una realizzazione di  $G(s)$ .

Richiamiamo qui di seguito le relazioni che risolvono una catena di retroazione multi-variabile:

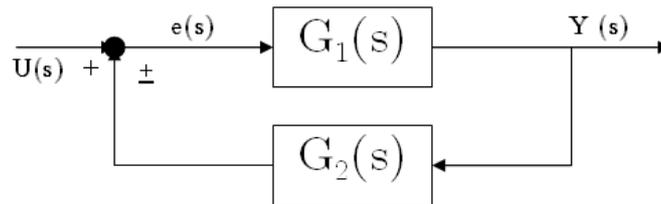


Figura 2.2: Connessione in retroazione

Per lo schema di figura 2.2 valgono le relazioni:

$$\begin{cases} Y(s) = (I \mp G_1(s)G_2(s))^{-1}G_1(s)U(s) & \text{(Punto di apertura dell'anello sull'uscita)} \\ Y(s) = G_1(s)(I \mp G_2(s)G_1(s))^{-1}U(s) & \text{(Punto di apertura dell'anello sull'errore)} \end{cases} \quad (2.2)$$

dove si definiscono:

$$\left. \begin{array}{l} -G_1(s)G_2(s) \\ -G_2(s)G_1(s) \end{array} \right\} \textit{Return Ratios} \qquad \left. \begin{array}{l} I + G_1(s)G_2(s) \\ I + G_2(s)G_1(s) \end{array} \right\} \textit{Return Differences}$$

## 2.2 Forma di Smith-McMillan di una matrice di f.d.t.

Qualsiasi matrice di f.d.t.  $G(s)$  si può ridurre ad una forma canonica pseudo-diagonale, nota come forma di **Smith-McMillan** del sistema. Gli zeri e i poli di una  $G(s)$  si definiscono in base a questa forma canonica. E'ovvio che qualunque  $G(s)$  si può esprimere come una matrice polinomiale divisa per un denominatore comune polinomiale. Dimostriamo quindi prima che ogni *matrice polinomiale* può essere ricondotta ad una matrice polinomiale pseudo-diagonale detta forma canonica di *Smith*.

**Definizione 1** - Una matrice polinomiale  $P(s)$  si dice **unimodulare** se ammette una inversa anch'essa polinomiale.

Vale il seguente teorema:

**Teorema 4** -

$P(s)$  è unimodulare se e solo se  $\det P(s) = \text{cost}$ .

**Dimostrazione**

$\Leftarrow$  Si vuole dimostrare che se  $\det P(s) = \text{cost}$ , allora  $P(s)$  è unimodulare.

Sia  $P(s)$  polinomiale:

$$\det P(s) = \text{cost} = k \Rightarrow P^{-1}(s) = \frac{1}{k} \text{adj}[P(s)] \text{ è polinomiale} \Rightarrow P^{-1}(s) \text{ è polinomiale}$$

Pertanto  $P(s)$  è unimodulare.

*C.V.D.*

$\Rightarrow$  Si vuole dimostrare che se  $P(s)$  è unimodulare allora  $\det P(s) = \text{cost}$ .

Sappiamo che:

$$P(s)P^{-1}(s) = I \Rightarrow \det[P(s)]\det[P^{-1}(s)] = 1.$$

$P(s)$  è unimodulare per cui sia  $P(s)$  che  $P^{-1}(s)$  sono polinomiali. Combinando questa condizione con  $\det[P(s)]\det[P^{-1}(s)] = 1$ , cioè col fatto che  $\det[P] = [\det[P^{-1}]]^{-1}$ , se ne deduce che  $\det[P]$  non può che essere una costante.

*C.V.D.*

■

Le seguenti operazioni elementari si possono applicare ad una matrice polinomiale, e sono riducibili a moltiplicazione della matrice per una *matrice elementare* opportuna (tutte le matrici elementari sono unimodulari):

- scambio di due righe (o due colonne)

- prodotto di una riga (o colonna) per una costante
- somma di un multiplo polinomiale di una riga (o colonna) con un'altra riga (o colonna)

**Definizione 2** - Due matrici (polinomiali o razionali)  $P(s)$  e  $Q(s)$  sono dette **equivalenti** se esistono sequenze di matrici elementari sinistre  $\{L_1(s), \dots, L_l(s)\}$  e destre  $\{R_1(s), \dots, R_r(s)\}$  tali che:

$$P(s) = L_1(s) \cdot L_2(s) \cdot \dots \cdot L_l(s) \cdot Q(s) \cdot R_1(s) \cdot R_2(s) \cdot \dots \cdot R_r(s) \quad (2.3)$$

--

**Teorema 5** - (Equivalenza alla forma di Smith.) Sia  $P(s)$  una matrice polinomiale di **rango normale** pari ad  $r$  (cioè di rango  $r$  per quasi tutti i valori di  $s$ ). Allora  $P(s)$  può essere trasformata mediante una sequenza di operazioni elementari in una matrice polinomiale pseudo-diagonale  $S(s)$  data da:

$$S(s) = \text{diag}\{\varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s), \dots, \varepsilon_r(s), 0, \dots, 0\} \quad (2.4)$$

dove  $\varepsilon_i(s), i = 1, \dots, r$  sono polinomi monici tali che ogni  $\varepsilon_i$  divide con resto nullo  $\varepsilon_{i+1}$  (è un fattore di  $\varepsilon_{i+1}$ ).

Inoltre, se si definiscono i **divisori determinantal**  $D_i(s)$  come segue:

$$\begin{cases} D_0(s) = 1 \\ D_i(s) = \{\text{M.C.D. di tutti i minori } (i \times i) \text{ di } P(s), \text{ normalizzato a monico}\} \end{cases}$$

Allora:

$$\varepsilon_i(s) = \frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)}, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.5)$$

--

■

La  $S(s)$  che compare nella (2.4) è detta **forma di Smith** di  $P(s)$ , e gli  $\varepsilon_i(s)$  sono detti **fattori invarianti** di  $P(s)$ .

**Esempio**

Sia data la seguente  $P(s)$ :

$$P(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ (s^2 + s - 4) & (2s^2 - s - 8) \\ (s^2 - 4) & (2s^2 - 8) \end{bmatrix}$$

Vale:

$$D_0(s) = 1$$

$$D_1(s) = M.C.D.\{1, -1, (s^2 + s - 4), (2s^2 - s - 8), (s^2 - 4), (2s^2 - 8)\} = 1$$

$$\begin{aligned} D_2(s) &= M.C.D. \left\{ \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ (s^2 + s - 4) & (2s^2 - s - 8) \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ (s^2 - 4) & (2s^2 - 8) \end{array} \right|, \right. \\ &\quad \left. \left| \begin{array}{cc} (s^2 + s - 4) & (2s^2 - s - 8) \\ (s^2 - 4) & (2s^2 - 8) \end{array} \right| \right\} = \\ &= M.C.D.\{3(s^2 - 4), 3(s^2 - 4), 3s(s^2 - 4)\} = s^2 - 4 \end{aligned}$$

Infine si ha:

$$\varepsilon_2 = \frac{D_2(s)}{D_1(s)} = s^2 - 4, \quad \varepsilon_1 = \frac{D_1(s)}{D_0(s)} = 1$$

↓

$$P(s) \sim S(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s^2 - 4) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

•

**Teorema 6** - (Forma di Smith-McMillan di una funzione razionale.) Sia  $G(s)$  una matrice razionale di rango normale  $r$ .  $G(s)$  può essere trasformata mediante operazioni elementari in una matrice razionale pseudo-diagonale  $M(s)$  così costituita:

$$M(s) = \text{diag} \left\{ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)}, 0, \dots, 0 \right\}, \quad (2.6)$$

dove  $\{\varepsilon_i(s), \psi_i(s)\}$  sono coprimi  $\forall i$  e sono tali che:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_i(s) | \varepsilon_{i+1}(s) \\ \psi_{i+1}(s) | \psi_i(s) \end{array} \right\} i = 1, \dots, r-1.$$

La matrice  $M(s)$  si chiama **forma di Smith-McMillan** di  $G(s)$ .

### **Dimostrazione**

Segue direttamente dal Teorema 5, tenendo presente che si può sempre esprimere  $G(s)$  come:

$$G(s) = \frac{1}{d(s)} P(s)$$

dove  $d(s)$  è il m.c.m. dei denominatori di  $G(s)$  e  $P(s)$  è una matrice polinomiale. ■

### **Esercizio**

Costruire la forma di Smith-McMillan della seguente  $G(s)$ :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+3s+2} & \frac{-1}{s^2+3s+2} \\ \frac{s^2+s-4}{s^2+3s+2} & \frac{2s^2-s-8}{s^2+3s+2} \\ \frac{s-2}{s+1} & \frac{2s-4}{s+1} \end{bmatrix}.$$

$G(s)$  si può esprimere come segue:

$$G(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} P(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ (s^2+s-4) & (2s^2-s-8) \\ (s^2-4) & (2s^2-8) \end{bmatrix}$$

dove  $P(s)$  è la matrice dell'esercizio precedente. ●

## 2.3 Poli e zeri di una matrice di f.d.t.

**Definizione 3** - Sia  $M(s)$  la forma si Smith-McMillan di  $G(s)$ . Si definiscono **polinomio dei poli** e **polinomio degli zeri** di  $G(s)$  rispettivamente i due polinomi

$$p(s) = \psi_1(s)\psi_2(s)\dots\psi_r(s) \quad (2.7)$$

$$z(s) = \varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\dots\varepsilon_r(s). \quad (2.8)$$

Le radici di  $p(s)$  e di  $z(s)$  si chiamano rispettivamente **poli** e **zeri di trasmissione** di  $G(s)$ . --

**Osservazione 6** -  $p_0$  è un polo di  $G(s)$  di molteplicità  $\nu$  se  $(s-p_0)^\nu$  è un fattore di qualche  $\psi_i(s)$

### Esempio

Consideriamo la matrice dell'esempio precedente:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+3s+2} & \frac{-1}{s^2+3s+2} \\ \frac{s^2+s-4}{s^2+3s+2} & \frac{2s^2-s-8}{s^2+3s+2} \\ \frac{s-2}{s+1} & \frac{2s-4}{s+1} \end{bmatrix}$$

↓

$$p(s) = (s+1)^2(s+2)$$

$$z(s) = (s-2)$$

$$poli = \{-1, -1, -2\}; \quad zeri = \{2\}$$

•

**Corollario 1** - Se  $G(s)$  è quadrata, allora:

$$\det[G(s)] = c \frac{z(s)}{p(s)}, \quad c = \text{costante}. \quad (2.9)$$

--

**Osservazione 7** - Nonostante  $\{\varepsilon_i, \psi_i\}$  siano coprimi  $\forall i$ , si possono verificare cancellazioni nell'espressione di  $\det[G(s)]$

**Definizione 4** - Si definisce **grado di McMillan** di  $G(s)$  il grado del polinomio dei poli  $p(s)$ .

--

E' chiaro dalla (2.6) che se  $z_0$  è uno zero di  $G(s)$  allora il rango normale di  $G(s)$  cade per  $s = z_0$ . Pertanto  $\exists u_0 \neq 0$  tale che  $G(z_0)u_0 = 0$ .

Consideriamo adesso il seguente ingresso:

$$U(s) = \frac{u_0}{s - z_0} \quad (2.10)$$

La risposta del sistema a questo ingresso vale:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) + (\text{evoluzione libera}) = \\ &= \frac{G(z_0)u_0}{s - z_0} + \sum_i \frac{R_i U(p_i)}{s - p_i} + (\text{evoluzione libera}). \end{aligned}$$

Poichè il primo termine della risposta è nullo per ciò che si è detto prima, se ne desume che scegliendo opportunamente le condizioni iniziali si può fare in modo che

$$Y(s) = 0.$$

Dunque gli zeri di trasmissione hanno una proprietà bloccante, nel senso che ad un ingresso del tipo espresso nella (2.10) il sistema risponde con uscita nulla, per certe fissate condizioni iniziali. Per questo motivo gli zeri definiti nella forma di Smith-McMillan si chiamano *zeri di trasmissione* del sistema.

**Osservazione 8** - La posizione dei poli di  $G(s)$  la si determina facilmente ispezionando i denominatori di  $g_{ij}(s)$ . Al contrario il loro numero e la loro molteplicità non è di facile determinazione senza costruire la forma di Smith-McMillan. Per quanto concerne gli zeri, invece, non si possono individuare nè posizione nè numero e molteplicità senza passare alla forma di Smith-McMillan.

Sul significato dei poli di  $G(s)$  si osserva che dall'espansione in fratti semplici si ottiene:

$$G(s) = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{G_i}{(s - p_i)^{k_i}} + G_0 \quad (G_i, G_0: \text{matrici costanti})$$

$$G(t) = \sum_{i=1}^{\nu} G_i t^{k_i-1} e^{p_i t} + G_0 \delta(t) \quad (\text{matrice delle risposte impulsive del sistema}).$$

## 2.4 Rappresentazione di una matrice di f.d.t.

Sia  $G(s) \in \mathbb{C}^{m \times l}$  una matrice di f.d.t. razionali **strettamente proprie** ( $G(\infty) = 0$ ). Siano  $L^{-1}(s)$  e  $R^{-1}(s)$  le matrici unimodulari che trasformano  $G(s)$  nella forma di Smith-McMillan  $M(s)$ :

$$\begin{matrix} (m \times l) & (m \times m) & (m \times l) & (l \times l) \\ G(s) = L(s) M(s) R(s) \end{matrix}$$

↓

$$G(s) = L(s) \text{diag} \left\{ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)}, 0, \dots, 0 \right\} R(s). \quad (2.11)$$

Possiamo esprimere  $M(s)$  come segue:

$$M(s) = N'(s) D'(s)^{-1} \quad (2.12)$$

essendo  $N'(s)$  e  $D'(s)$  matrici polinomiali definite da:

$$\begin{aligned} N'(s) &= \text{diag} \{ \varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s), \dots, \varepsilon_r(s), 0, \dots, 0 \} \in \mathbb{C}^{m \times l} \\ D'(s) &= \text{diag} \{ \psi_1(s), \psi_2(s), \dots, \psi_r(s), 1, \dots, 1 \} \in \mathbb{C}^{l \times l}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Sostituendo la (2.13) nella (2.11) si ottiene:

$$G(s) = \underbrace{L(s)N'(s)}_{N(s)} \underbrace{D'(s)^{-1}R(s)}_{D(s)^{-1}} = N(s)D(s)^{-1}. \quad (2.14)$$

La (2.14) è chiamata **rappresentazione di  $G(s)$  in frazione di matrice destra (MFD)**, in cui si definiscono:

$$\begin{aligned} \text{matrice numeratore: } N(s) &= L(s)N'(s) \\ \text{matrice denominatore: } D(s) &= R(s)^{-1}D(s). \end{aligned}$$

Poichè la matrice  $R(s)$  è unimodulare,  $R(s)^{-1}$  è polinomiale, pertanto  $N(s)$  e  $D(s)$  sono polinomiali. Riguardo alla rappresentazione MFD, si possono inoltre elencare le seguenti **proprietà**:

- $z$  è uno zero di  $G(s) \Leftrightarrow N(z)$  cade di rango;
- $p$  è un polo di  $G(s) \Leftrightarrow D(p)$  cade di rango (singolare);
- il polinomio dei poli di  $G(s)$  è proporzionale al determinante della matrice denominatore.

Un fatto molto importante è che  $G(s)$  non ammette un'unica MFD. Infatti, lo si può verificare nel seguente modo. Se  $X(s)$  è invertibile, allora

$$\begin{aligned} G(s) &= N(s)X(s)X^{-1}(s)D^{-1}(s) \\ &= \underbrace{[N(s)X(s)]}_{\tilde{N}(s)} \underbrace{[D(s)X(s)]^{-1}}_{\tilde{D}(s)} = \tilde{N}(s)\tilde{D}(s)^{-1}. \end{aligned}$$

**Definizione 5** - Siano  $N(s)$  e  $D(s)$  due matrici con identico numero di colonne. Se esistono  $\tilde{N}(s)$  e  $\tilde{D}(s)$  tali che:

$$N(s) = \tilde{N}(s)U(s) \text{ e } D(s) = \tilde{D}(s)U(s)$$

solo per  $U(s)$  unimodulare, allora si dice che  $N(s)$  e  $D(s)$  sono **coprime a destra**

--

**Definizione 6** - Siano  $N(s)$  e  $D(s)$  due matrici con identico numero di righe. Se esistono  $\tilde{N}(s)$  e  $\tilde{D}(s)$  tali che:

$$N(s) = U(s)\tilde{N}(s) \text{ e } D(s) = U(s)\tilde{D}(s)$$

solo per  $U(s)$  unimodulare, allora si dice che  $N(s)$  e  $D(s)$  sono **coprime a sinistra**

--

**Definizione 7** - Una MFD  $G(s) = N(s)D^{-1}(s)$  [ $G(s) = D^{-1}(s)N(s)$ ] si dice **irriducibile** se  $N(s)$  e  $D(s)$  sono coprime a destra [a sinistra]

--

E' facile verificare che vale il seguente:

**Teorema 7** - Sia  $G(s) = N(s)D^{-1}(s)$  [ $G(s) = D^{-1}(s)N(s)$ ] con  $N(s)$  e  $D(s)$  coprime; allora:

1)  $z$  è uno zero di  $G(s) \Leftrightarrow N(z)$  cade di rango

2)  $p$  è un polo di  $G(s) \Leftrightarrow D(p)$  è singolare .

--

**Corollario 2** - Sia  $G(s) = N(s)D^{-1}(s)$  [ $G(s) = D^{-1}(s)N(s)$ ] con  $N(s)$  e  $D(s)$  coprime; allora:

$$p(s) \equiv \det[D(s)].$$

--

## 2.5 Realizzazione nello spazio di stato di una MFD

Sappiamo che:

$$G(s) = \frac{C \operatorname{adj}(sI - A)B}{\det[sI - A]} + D.$$

Se  $(A, B, C, D)$  è completamente osservabile e controllabile, allora:

$$p(s) = \det[sI - A(s)] \tag{2.15}$$

↓

$$\dim(A) \geq (\text{grado di McMillan di } G(s)) = \deg[p(s)].$$

Una realizzazione completamente osservabile e controllabile è detta **minima**.

## 2.6 Numero degli zeri di una matrice di f.d.t.

Determinare il numero degli zeri specialmente di una f.d.t. rettangolare è particolarmente arduo, (perchè una matrice rettangolare cada di rango, devono annullarsi un insieme opportuno di minori della matrice in uno stesso  $\bar{s}$ ). Genericamente le f.d.t. rettangolari non hanno zeri.

### Esempi

1.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s+2} & \frac{s+3}{s+4} \end{bmatrix} \Rightarrow \rho_{norm} [G(s)] = 1 \Rightarrow \text{non esistono zeri}$$

2.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s+2} & \frac{s+3}{s+4} \\ \frac{1}{s+5} & \frac{s+1}{s+6} \\ \frac{s+3}{s+4} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \Rightarrow \rho_{norm} [G(s)] = 2 \Rightarrow \text{non esistono zeri}$$

•

Per discutere il numero di zeri di una f.d.t. quadrata, bisogna introdurre il concetto di poli e zeri all'infinito.

Consideriamo per un attimo il caso S.I.S.O. Sia data la funzione di trasferimento:

$$G(s) = k \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

Poichè una funzione razionale ha sempre un numero uguale di poli e zeri, allora se  $n > m$  si dice che  $G(s)$  ha  $n - m$  zeri all'infinito; viceversa se  $m > n$ ,  $G(s)$  ha  $m - n$  poli all'infinito.

Torniamo ora al caso M.I.M.O.

**Definizione 8** - Sia  $G'(\xi) = G(\frac{1}{\xi})$ . Poli e zeri di  $G(s)$  per  $s = \infty$  coincidono con poli e zeri di  $G'(\xi)$  a  $\xi = 0$

---

Si può dimostrare il seguente teorema:

**Teorema 8** - Se  $G(s)$  è quadrata, allora il numero di poli di  $G(s)$  eguaglia quello degli zeri (inclusi poli e zeri all'infinito).

---

# Capitolo 3

## La stabilità nei sistemi M.I.M.O. in retroazione

### 3.1 Stabilità interna

**Definizione 9** - Una f.d.t. razionale si dice esponenzialmente stabile se essa è propria e non ha poli nel semipiano chiuso di destra ( $Re[s] \geq 0$ ).

**Osservazione 9** - L'ipotesi di essere propria è necessaria, perchè sistemi non propri possono dare uscite illimitate per ingressi limitati (cioè non vale la stabilità BIBO). Ad esempio, il seguente sistema non proprio ha comportamento non-BIBO:

$$G(s) = s \quad u(t) = \sin(t^2) \quad y(t) = 2t\cos(t^2)$$

Consideriamo ora nello schema di Figura 2.3 la seguente relazione:

$$\begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}(s)} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

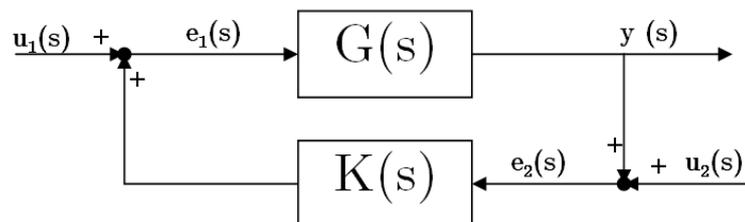


Figura 3.1: Sistema in retroazione

**Definizione 10** - (Desoer & Chan, 1975) Un sistema come quello mostrato in figura 3.1 è **internamente stabile** se e solo se la f.d.t.  $\mathbf{H}(s)$  è esponenzialmente stabile, cioè se tutte le funzioni  $H_{ij}(s)$  sono esponenzialmente stabili.

--

Se  $K(s)$  e  $G(s)$  sono instabili, per verificare la definizione 10 è necessario verificare la stabilità di tutte e quattro le funzioni  $H_{ij}(s)$ . Se invece almeno una delle due ( $K(s)$  o  $G(s)$ ) è stabile, le cose si semplificano notevolmente.

**Teorema 9** - (Desoer & Chan, 1975) Sia  $K(s)$  esponenzialmente stabile. Allora un sistema in retroazione come quello mostrato in figura 3.1 è internamente stabile se e solo se la funzione di trasferimento

$$H_{21}(s) = [I - G(s)K(s)]^{-1}G(s)$$

è esponenzialmente stabile.

--

### **Dimostrazione**

$\Rightarrow$  Si vuole dimostrare che se il sistema è internamente stabile allora  $H_{21}(s) = [I - G(s)K(s)]^{-1}G(s)$  è esponenzialmente stabile

– La dimostrazione è ovvia applicando la definizione 10.

$\Leftarrow$  Si vuole dimostrare che se  $H_{21}(s) = [I - G(s)K(s)]^{-1}G(s)$  è esponenzialmente stabile allora il sistema è internamente stabile

– Per semplicità nel seguito ometteremo la dipendenza delle varie f.d.t. da  $s$ . Sappiamo che:

$$\begin{aligned} H_{11} &= (I - KG)^{-1} & H_{12} &= (I - KG)^{-1}K \\ H_{21} &= (I - GK)^{-1}G & H_{22} &= (I - GK)^{-1} \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} I + KH_{21} &= I + K(I - GK)^{-1}G = \\ &= I + KG(I - KG)^{-1} = \\ &= (I - KG)(I - KG)^{-1} + KG(I - KG)^{-1} = \\ &= (I - KG)^{-1} = \\ &= H_{11}. \end{aligned}$$

↓

Se  $K$  e  $H_{21}$  sono esponenzialmente stabili allora lo è anche  $H_{11}$ . Inoltre, poichè  $H_{12} = H_{11}K$ , anche  $H_{12}$  è esponenzialmente stabile. Infine vale:

$$\begin{aligned} I + H_{21}K &= I + (I - GK)^{-1}GK = \\ &= (I - GK)^{-1}(I - GK) + (I - GK)^{-1}GK = \\ &= (I - GK)^{-1} = \\ &= H_{22}. \end{aligned}$$

Pertanto si è dimostrato che se  $K(s)$  e  $H_{21}(s)$  sono esponenzialmente stabili allora lo sono anche  $H_{11}(s)$ ,  $H_{12}(s)$  e  $H_{22}(s)$ , cioè il sistema è internamente stabile.

*C.V.D.*

■

Nell'ipotesi che  $K(s)$  sia stabile, il seguente teorema fornisce una condizione necessaria e sufficiente per verificare la stabilità di  $H_{21}(s)$ .

**Teorema 10** - *Sia  $K(s)$  esponenzialmente stabile. Allora  $H_{21}(s)$  è esponenzialmente stabile se e solo se:*

1.  $\det[I - G(s)K(s)]$  non ha zeri nel semipiano destro chiuso;
2.  $(I - G(s)K(s))^{-1}G(s)$  è analitica in ogni polo instabile di  $G(s)$ .

— —

### **Dimostrazione**

⇐ *Si vuole dimostrare che se  $K(s)$  e  $H_{21}(s)$  sono esponenzialmente stabili allora valgono 1 e 2.*

1. Sia  $G(s)K(s) = N(s)D^{-1}(s)$  una MFD irriducibile di  $G(s)K(s)$ . Allora si ha:

$$H_{21}(s) = (I - G(s)K(s))^{-1}G(s) = D(s)(D(s) - N(s))^{-1}G(s).$$

Pertanto se  $H_{21}$  è esponenzialmente stabile allora  $D(s) - N(s)$  non ha zeri a destra.

↓

$$\det[(D(s) - N(s))] \neq 0 \text{ nel semipiano chiuso destro}$$

↓

$$\det[I - N(s)D^{-1}(s)] = \det[I - G(s)K(s)] \neq 0 \text{ nel semipiano chiuso destro.}$$

2. Ovvvia

*C.V.D.*

$\Rightarrow$  Si vuole dimostrare che se valgono 1 e 2, allora  $H_{21}(s)$  è esponenzialmente stabile.

Per la 1 vale  $\det[I - G(s)K(s)] \neq 0$  nel semipiano chiuso destro. Pertanto ciascun polo a destra di  $H_{21}(s)$  deve essere un polo a destra di  $G(s)$ . Tuttavia per la 2, la  $H_{21}(s)$  è analitica nei poli a destra appartenenti a  $G(s)$ , pertanto  $H_{21}(s)$  non può avere poli a destra.

*C.V.D.*

■

### Esempio

Siano date:

$$K(s) = \frac{s-1}{s+2} \text{ e } G(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Si verifica facilmente che:

$$1) \quad \det[I - G(s)K(s)] = \frac{s+1}{s+2}$$

$$2) \quad (I - G(s)K(s))^{-1}G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)}.$$

Da questo esempio si capisce il ruolo che gioca la condizione 2 del Teorema 10. In particolare essa permette di verificare la presenza o meno di cancellazioni zeri/poli instabili nella cascata del controllore  $K(s)$  con l'impianto  $G(s)$ .

●

## 3.2 Il criterio di Nyquist generalizzato

Supponiamo che  $G(s)$  sia **quadrata**, che essa rappresenti la cascata di un impianto con un controllore e che essa non presenti modi instabili nascosti. Vogliamo esaminare la stabilità dell'anello di retroazione ottenuto inserendo nel loop un compensatore proporzionale  $K(s) = kI$  (Si può applicare quindi solo la (1) del Teorema 10). Assumendo retroazione negativa, consideriamo l'espressione  $\det[I + G(s)K(s)]$ . Siano  $n_{pd}^{aa}$  il numero dei poli a destra di tale funzione e  $n_{zd}$  il numero di zeri a destra. Sappiamo che:

$$\Delta arg \{det[I + kG]\} = \{-2\pi(n_{zd} - n_{pd}^{aa})\}, \quad (3.2)$$

dove  $\Delta arg$  rappresenta la variazione di fase che si verifica quando  $s$  percorre l'asse immaginario da  $-j\infty$  a  $j\infty$ . Per avere stabilità ad anello chiuso è necessario che  $n_{zd} = 0$ , cioè:

$$\Delta arg \{det[I + kG(s)]\} = 2\pi n_{pd}^{aa}, \quad (3.3)$$

che è esattamente la generalizzazione del criterio di Nyquist. Si noti che  $n_{pd}^{aa}$  rappresenta il numero di poli a destra del sistema ad anello aperto, cioè di  $G(s)$ . La (3.3) può essere resa utilizzabile per studiare il comportamento del sistema al variare di  $k$  mediante le seguenti osservazioni.

Sia  $\lambda_i(s)$  un autovalore di  $G(s)$ . Allora è noto che  $k\lambda_i(s)$  è un autovalore di  $kG(s)$  e quindi  $1 + k\lambda_i(s)$  è un autovalore di  $I + kG(s)$ . Pertanto si ha che

$$\begin{aligned} det[I + kG(s)] &= \prod_i (1 + k\lambda_i(s)) \\ &\Downarrow \\ \Delta arg \{det[I + kG(s)]\} &= \sum_i \Delta arg \{1 + k\lambda_i(s)\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Quindi il criterio di Nyquist diventa:

$$\sum_i \Delta arg \{1 + k\lambda_i(s)\} = 2\pi n_{pd}^{aa}. \quad (3.5)$$

La (3.5) rappresenta la formulazione finale del criterio di Nyquist generalizzato, che gode di tutte le proprietà di *normalizzabilità* rispetto a  $k$  esattamente come nel caso del criterio standard monovariabile (in base al quale, tramite un unico tracciamento del diagramma, si studia la stabilità  $\forall k$ ).

I grafici degli autovalori  $\lambda_i(s)$  per  $s = j\omega$ ,  $\omega \in (-\infty, +\infty)$  si chiamano **luoghi caratteristici**.

**Osservazione 10** - *In termini rigorosi la riformulazione che compare nella (3.5) non sarebbe completa. Infatti, non essendo gli autovalori di  $G(s)$  in genere funzioni razionali, non è garantito a priori che i diagrammi di  $\lambda_i(s)$  siano chiusi. Si può comunque provare che, poichè  $G(j\infty) = G(-j\infty)$ , allora se si costruiscono i diagrammi di tutti i  $\lambda_i(s)$  si ottengono curve chiuse e il numero di rotazioni è ben definito.*

**Teorema 11 - (Nyquist generalizzato)** *Si supponga che  $G(s)$  abbia  $n_{pd}^{aa}$  poli instabili (Smith-McMillan) e che non esistano modi instabili nascosti. L'anello chiuso con return ratio  $= -kG(s)$  è stabile se e solo se i luoghi caratteristici di  $kG(s)$  circondano il punto  $(-1, 0)$  del piano complesso  $n_{pd}^{aa}$  volte in senso antiorario.*

--

### Esempio

Sia:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{s-10}{s+1} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_i(s) = \pm \sqrt{\frac{s-10}{s+1}}$$

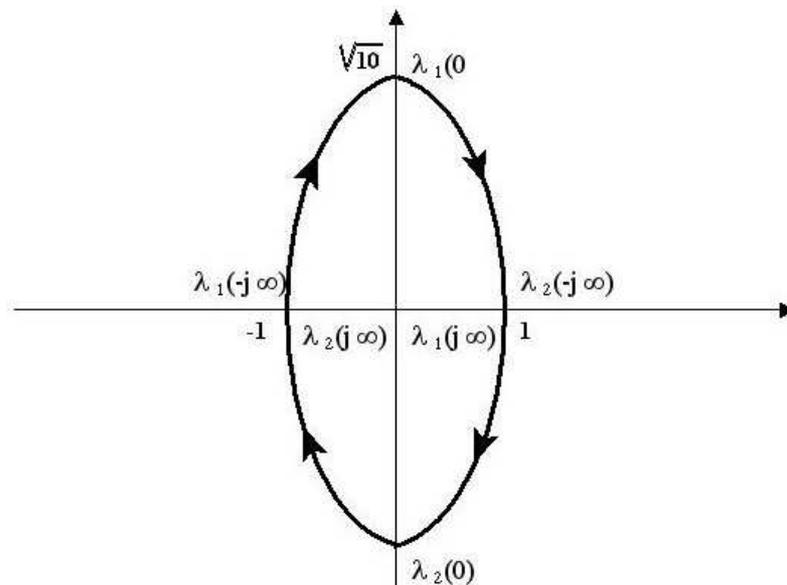


Figura 3.2: Diagramma di Nyquist dei luoghi caratteristici

•

### Esercizio

Verificare la stabilità ad anello chiuso con controllore proporzionale  $kI$  per la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{1,25(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s-1 & s \\ -6 & s-2 \end{bmatrix}$$

[Soluzioni:  $0.53 < -k^{-1} < \infty$ ;  $-\infty < k^{-1} < -0.8$ ;  $-0.4 < k^{-1} < 0$ ]

•

### 3.3 Nyquist arrays e bande di Gershgorin

Il **Nyquist array** di una funzione di trasferimento  $G(s)$ , non necessariamente quadrata, è l'insieme dei diagrammi di Nyquist di  $g_{ij}(s)$ . Il risultato base usato nel seguito in congiunzione con l'array di Nyquist è il seguente:

**Teorema 12** - (Gershgorin) *Sia  $M$  una matrice complessa di dimensioni  $m \times m$ . Allora gli autovalori di  $M$  giacciono nell'unione degli  $m$  cerchi centrati in  $m_{ii}$  ed aventi raggi  $r_i$  dati da:*

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |m_{ij}|, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.6)$$

*Inoltre tali autovalori giacciono negli  $m$  cerchi centrati in  $m_{ii}$  ed aventi raggi:*

$$r'_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |m_{ji}|, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.7)$$

--

Consideriamo ora una  $G(s)$  quadrata e i diagrammi di Nyquist di  $g_{ii}(s)$ . Sovrapponiamo ad ogni  $\omega$  al punto  $g_{ii}(j\omega)$  un cerchio di raggio dato dalla (3.6) o dalla (3.7). Si ottengono così le cosiddette **bande di Gershgorin** per ciascun  $g_{ii}(j\omega)$ . Ciascuna banda è fatta dall'unione di **cerchi di Gershgorin**. Il teorema di Gershgorin assicura che queste bande contengono, frequenza per frequenza, i luoghi caratteristici di  $G(s)$ . Dunque, se le bande di Gershgorin di  $G(s)$  non contengono il punto  $(-1, 0)$ , possiamo dedurre le rotazioni intorno a tale punto degli autovalori  $\lambda_i(s)$  direttamente da quello delle bande (più precisamente tali rotazioni coincidono).

**Definizione 11** - Si dice che  $G(s)$  è **dominante diagonale (per righe o per colonne)** se le bande di Gershgorin di  $G(j\omega)$  non contengono l'origine  $\forall \omega$ .

Ovviamente per usare il risultato per l'analisi di stabilità è necessario che  $[I + K(s)G(s)]$  sia diagonale dominante. Se  $[I + K(s)G(s)]$  non è diagonale dominante, allora non si può concludere nulla sulla stabilità dell'anello chiuso senza verificare direttamente i luoghi caratteristici  $\lambda_i(s)$ . Supponiamo adesso di eseguire una trasformazione di similarità su  $G(s)$ :

$$\tilde{G}(s) = X(s)G(s)X^{-1}(s). \quad (3.8)$$

Potrebbe capitare che, pur avendo  $G(s)$  e  $\tilde{G}(s)$  gli stessi luoghi caratteristici,  $\tilde{G}(s)$  è diagonale dominante mentre  $G(s)$  non lo è.

**Osservazione 11** - Eseguire la trasformazione espressa dalla (3.8) equivale ad operare una trasformazione tramite  $X(s)$  sulle uscite del sistema e tramite  $X^{-1}(s)$  sugli ingressi. Tale trasformazione è uno **scalamento** se  $X(s)$  è diagonale.

Esiste un risultato di Mees(1981) che ha permesso di utilizzare praticamente sempre il risultato sulla diagonale dominante. Prima di enunciare il risultato di Mees saranno introdotte alcune definizioni.

**Definizione 12** - Data una matrice  $M(j\omega)$  si definisce  $absM(j\omega)$  come:

$$abs(M(j\omega)) = \{|m_{i,j}(j\omega)|\}.$$

Tale matrice si dice **positiva**. Se  $M(j\omega)$  è quadrata, siano  $\{\lambda_1(j\omega), \lambda_2(j\omega), \dots, \lambda_m(j\omega)\}$  gli autovalori di  $M(j\omega)$  ordinati secondo il modulo decrescente, cioè tali che:

$$|\lambda_1(j\omega)| \geq |\lambda_2(j\omega)| \geq \dots \geq |\lambda_m(j\omega)|.$$

Si dice che  $M(j\omega)$  è **primitiva** se  $(abs(M(j\omega)))^r$  ha solo elementi positivi per qualche valore di  $r$ . In questo caso  $\lambda_1(j\omega)$  è reale ed è tale che:

$$\lambda_1(j\omega) \geq |\lambda_2(j\omega)| \geq \dots \geq |\lambda_m(j\omega)|,$$

dove  $\lambda_1(j\omega)$  è detto **autovalore di Perron-Frobenius** di  $M(j\omega)$  ed è indicato in genere con  $\lambda_p((M(j\omega)))$

**Definizione 13** - Data la matrice quadrata  $M = \{m_{ij}\}$  di dimensione  $m$  si definisce:

$$M_{diag} = diag\{m_{11}, m_{22}, \dots, m_{mm}\}.$$

--

Introdotte le precedenti definizioni si può ora enunciare il risultato di Mees:

**Teorema 13 - (Mees)** Sia  $G(s)$  quadrata e primitiva. Allora esiste una matrice diagonale  $X$  tale che

$$\tilde{G} = XGX^{-1}$$

è **diagonale dominante** se e solo se vale la disuguaglianza:

$$\lambda_p(GG_{diag}^{-1}) < 2. \quad (3.9)$$

--

Se la (3.9) è verificata allora:  $X = diag\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , essendo  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  l'auto-vettore di Perron-Frobenius sinistro di  $GG_{diag}^{-1}$ .

In base al teorema (13) si possono fare le seguenti osservazioni:

- se il teorema di Mees è applicabile con esito positivo, allora si può provare che le bande di Gershgorin ottenute sono le minime ottenibili mediante trasformazioni di similarità diagonali;
- il teorema di Mees andrebbe in realtà applicato a  $I + G$ . Ma si nota che:

$$X(I + G)X^{-1} = I + XGX^{-1}$$

pertanto si può lavorare direttamente con la  $G$ ;

- l'ipotesi di primitività è generalmente non restrittiva. Essa può essere violata solo imponendo a zero alcuni elementi  $g_{ij}$ . In questo caso, però, si può in genere ridurre a diagonale o triangolare la  $G(s)$ , utilizzando direttamente la generalizzazione del criterio di Nyquist data in funzione dei  $\lambda_i(s)$ .

Con quanto detto fin qui si può dimostrare il seguente teorema:

**Teorema 14 - (Rosenbrock, 1970)** Sia  $G(s)$  quadrata e  $K = diag\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ . Si supponga inoltre che non esistano modi instabili nascosti, che valga la relazione:

$$|g_{ii}(j\omega) + k_i^{-1}| > \sum_{j \neq i} |g_{ji}(j\omega)| \quad \forall i, \forall \omega \quad (3.10)$$

e che la  $i$ -esima banda di  $G(s)$  circonda il punto  $-k_i^{-1}$   $N_i$  volte in senso antiorario. Allora il sistema ad anello chiuso con return ratio  $-G(s)K$  è stabile se e solo se:

$$\sum_i N_i = n_{pd}^{aa} \quad (3.11)$$

dove  $n_{pd}^{aa}$  è il numero di poli a destra di  $G(s)$ .

**Osservazione 12** - Ovviamente esiste una versione analoga del teorema di Rosenbrock relativa al caso con dominanza riga.

# Capitolo 4

## Prestazioni nei sistemi multivariabili

### 4.1 Guadagni principali e valori singolari

In un sistema S.I.S.O. molti indici di prestazione (reiezione dei disturbi trasmissione dei disturbi, sensitività a variazioni parametriche) dipendono dalla funzione di trasferimento ad anello aperto (ciò vale anche per margini di stabilità e caratteristiche della dinamica ad anello chiuso se l'anello aperto non ha poli instabili). Si cerca ora di estendere queste considerazioni ai sistemi multivariabili, dove le funzioni di trasferimento ad anello aperto sono molteplici. In questo caso possiamo caratterizzare i guadagni I/O tramite norme di matrici. Si assumerà spesso che  $G$  sia quadrata ed invertibile (ciò comunque non è necessario).

**Definizione 14** - Se  $\|\cdot\|$  è una qualunque norma vettoriale, si definisce **norma di matrice indotta (o subordinata)** la quantità:

$$\|G\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Gx\|}{\|x\|} \quad (4.1)$$

--

Se  $\|\cdot\|$  è la norma  $l_2$  o *Euclidea*:

$$\|x\| = (x^H x)^{\frac{1}{2}} \quad (x \text{ complesso}), \quad (4.2)$$

la norma di matrice indotta, detta **norma spettrale** è data da:

$$\|G\|_s = \bar{\sigma}, \quad (4.3)$$

essendo  $\bar{\sigma}^2$  il massimo autovalore di  $G^H G$  (o  $GG^H$ ).

Sia:  $G(m, l, m \geq l)$ , allora si definiscono:

$$\sigma_i = \lambda_i^{\frac{1}{2}}(G^H G) \Rightarrow \text{Valori singolari di } G$$

Sia:  $G(m, l, l \geq m)$ , allora si definiscono:

$$\sigma_i = \lambda_i^{\frac{1}{2}}(G G^H) \Rightarrow \text{Valori singolari di } G$$

Se la matrice considerata  $G$  è  $G(j\omega)$ , allora i valori singolari  $\sigma_i = \sigma_i(\omega)$  sono detti **guadagni principali** del sistema. In genere, essi sono ordinati in modo decrescente:

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m = \underline{\sigma}$$

**Osservazione 13** - *E' chiaro che:*

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) = \|G(j\omega)\|_s$$

*La precedente è una norma indotta ad ogni frequenza fissata, cioè dipendente dalla frequenza.*

## 4.2 Decomposizione ai valori singolari

Sia:

$$\Sigma = \text{diag} \{ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m \} \quad (4.4)$$

Si può dimostrare che  $G(s)$  si può sempre esprimere come

$$G(s) = Y(s)\Sigma(s)U^H(s) \quad (4.5)$$

Nella (4.5) vale:

$$\begin{array}{ll}
 \text{se } m \geq l & \text{se } m \leq l \\
 \begin{array}{l}
 Y(s) \in \mathbb{C}^{m \times l} \\
 \Sigma(s) \in \mathbb{R}^{l \times l} \\
 U^H(s) \in \mathbb{C}^{l \times l} \\
 Y^H(s)Y(s) = I_l \\
 U^H(s)U(s) = U(s)U^H(s) = I_l
 \end{array} & (4.6) \quad \begin{array}{l}
 Y(s) \in \mathbb{C}^{m \times m} \\
 \Sigma(s) \in \mathbb{R}^{m \times m} \\
 U^H(s) \in \mathbb{C}^{m \times l} \\
 Y^H(s)Y(s) = Y(s)Y^H(s) = I_m \\
 U^H(s)U(s) = I_m
 \end{array} & (4.7)
 \end{array}$$

**Osservazione 14** - La decomposizione ai valori singolari non è unica: qualunque coppia

$$Y'(s) = Y e^{j\theta}, U'^H = U^H e^{-j\theta}$$

dà ancora origine ad una decomposizione ai valori singolari di  $G(s)$ . Al contrario, gli elementi  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$  che compongono  $\Sigma(s)$  sono **unic**.

La decomposizione ai valori singolari gode delle seguenti proprietà (dove per semplicità si omette la dipendenza da  $s$ ):

**P1** :

$$\begin{aligned}
 GG^H &= (Y\Sigma U^H)(Y\Sigma U^H)^H = \\
 &= Y\Sigma U^H U \Sigma Y^H = Y\Sigma^2 Y^H & (4.8) \\
 (m \leq l \Rightarrow Y^H &= Y^{-1})
 \end{aligned}$$

La (4.8) dice che  $Y$  è la matrice di autovettori di  $GG^H$ , e quindi i  $\sigma_i^2$  sono gli autovalori di  $GG^H$ .

Analogamente si può dimostrare che:

$$G^H G = U \Sigma^2 U^H \quad (4.9)$$

$$(l \leq m \Rightarrow U^H = U^{-1}).$$

La (4.9) dice che  $U$  è la matrice di autovettori di  $G^H G$ , e quindi i  $\sigma_i^2$  sono gli autovalori di  $G^H G$ .

**P2** : Sia:

$$H = U\Sigma^{-1}Y^H$$

E' facile verificare che:

$$HGH = H \text{ e } GHG = G.$$

Quindi  $H$  è la *pseudoinversa* di  $G$ , cioè:

$$H \triangleq G^+ = U\Sigma^{-1}Y^H. \quad (4.10)$$

**Osservazione 15** - Se  $\rho(G) < \min(l, m)$ , allora:

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dove } \Sigma_r \triangleq \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\} \quad (4.11)$$

**P3** : Supposto che  $G$  sia **quadrata e non singolare**, allora:

$$G^{-1} = U\Sigma^{-1}Y^H \Rightarrow \|G^{-1}(j\omega)\|_s = \frac{1}{\underline{\sigma}(\omega)}. \quad (4.12)$$

**P4** : Ricordando che  $Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$ , sappiamo che:

$$\frac{\|G(j\omega)U(j\omega)\|}{\|U(j\omega)\|} \leq \bar{\sigma}(\omega) \quad \text{e} \quad \frac{\|G^{-1}(j\omega)Y(j\omega)\|}{\|Y(j\omega)\|} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(\omega)}.$$

Pertanto si ha che:

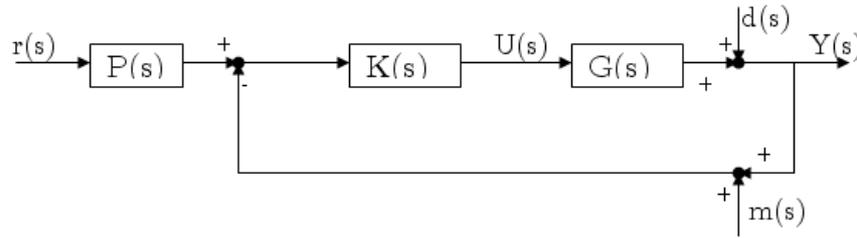
$$\underline{\sigma}(\omega) \leq \frac{\|G(j\omega)U(j\omega)\|}{\|U(j\omega)\|} \leq \bar{\sigma}(\omega). \quad (4.13)$$

**Definizione 15** - Si definisce **condition number** (indice di condizionamento) il rapporto:

$$\text{cond}(G(s)) = \frac{\bar{\sigma}(G(s))}{\underline{\sigma}(G(s))} \quad (4.14)$$

--

Il condition number dà una misura di quanto sia difficile invertire una matrice. Nei controlli,  $\text{cond}(G(s))$  rappresenta un parametro che misura la difficoltà intrinseca di controllare un impianto.



### 4.3 Definizione delle prestazioni di un sistema tramite i guadagni principali

Dallo schema precedente si deduce che:

$$Y(s) = S(s)d(s) + [I - S(s)]P(s)r(s) - [I - S(s)]m(s), \tag{4.15}$$

$$y(s) = [I - T(s)]d(s) + T(s)P(s)r(s) - T(s)m(s), \tag{4.16}$$

dove si è posto:

$$\begin{aligned} S(s) &= [I + G(s)K(s)]^{-1} \\ T(s) &= [I + G(s)K(s)]^{-1}G(s)K(s). \end{aligned} \tag{4.17}$$

La funzione  $S(s)$  è detta **funzione di sensitività**, e  $T(s)$  è detta **funzione di sensitività complementare**. E' facile verificare che vale la seguente relazione:

$$S(s) + T(s) = I.$$

Per quanto riguarda l'attenuazione dei disturbi (ovvero la sensitività di anello), si considerano  $\bar{\sigma}_S(j\omega)$  e  $\underline{\sigma}_S(j\omega)$ . Se la differenza  $|\bar{\sigma}_S(j\omega)| - |\underline{\sigma}_S(j\omega)|$  fosse piccola, allora la descrizione della sensitività tramite i valori singolari sarebbe molto accurata. Viceversa, come spesso accade, tale scarto è notevole, e quindi si considera solo  $\bar{\sigma}_S(j\omega)$ , rendendo la descrizione conservativa. Con riferimento alla *propagazione dell'errore di misura*, si studiano i valori singolari di  $T(s)$ . Ciò che risulta importante limitare è nuovamente  $\bar{\sigma}_T(j\omega)$ . Poichè  $S(s) + T(s) = I$ , tenere bassi i valori  $\bar{\sigma}_S(j\omega)$  e  $\bar{\sigma}_T(j\omega)$  contemporaneamente può essere contraddittorio. Infatti vale il seguente risultato:

**Teorema 15** - Valgono le seguenti disuguaglianze:

$$|1 - \bar{\sigma}_S(j\omega)| \leq \bar{\sigma}_T(j\omega) \leq |1 + \bar{\sigma}_S(j\omega)| \tag{4.18}$$

$$|1 - \bar{\sigma}_T(j\omega)| \leq \bar{\sigma}_S(j\omega) \leq |1 + \bar{\sigma}_T(j\omega)|. \tag{4.19}$$

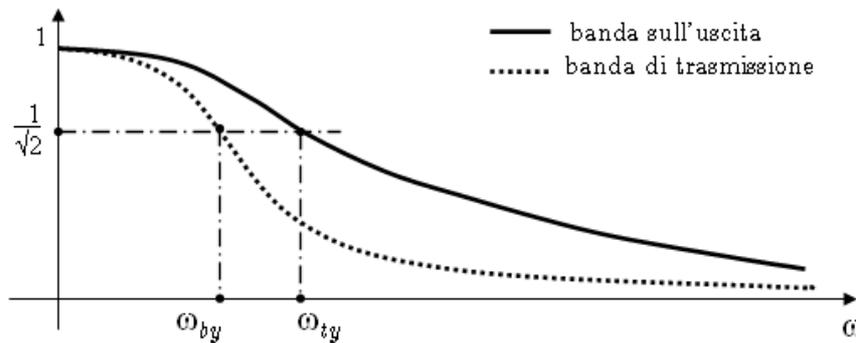
Supponendo ora che  $P(s) = I$  (progetto ad un grado di libertà), allora le proprietà di **trasmissione e inseguimento** del segnale di riferimento dipendono ancora da  $\sigma_T(j\omega)$ ; in particolare ciò che conta è  $\underline{\sigma}_T(j\omega)$ . Infatti si possono definire due tipi di bande:

**banda passante sull'uscita:**

$$\omega_{by} : \bar{\sigma}_T(j\omega_{by}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\sigma}_T(0) \quad (4.20)$$

**banda passante di trasmissione:**

$$\omega_{ty} : \underline{\sigma}_T(j\omega_{ty}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\sigma}_T(0) \quad (4.21)$$



Nel range di frequenze  $[\omega_{ty}, \omega_{by}]$ , il rumore di misura viene propagato, mentre il riferimento non è trasmesso bene. Questo fenomeno è tipico dei sistemi multivariabili, dunque un obiettivo importante è quello di **minimizzare** la banda  $(\omega_{by} - \omega_{ty})$ .

Se è possibile fare un progetto a due gradi di libertà, cioè  $P(s) \neq I$ , allora l'inseguimento del riferimento dipende da  $\underline{\sigma}_{TP}(j\omega)$  e quindi si può fare in modo che  $\omega_{ty} > \omega_{by}$  e addirittura si può **massimizzare** la differenza  $(\omega_{ty} - \omega_{by})$ .

Un'altra relazione da considerare è quella tra il comando  $U(s)$  e i vari ingressi:

$$U(s) = F^{-1}(s)K(s)P(s)r(s) - F^{-1}(s)K(s)[m(s) + d(s)] \quad (4.22)$$

dove vale:

$$F(s) = I + K(s)G(s).$$

Volendo limitare l'attività del controllo, bisogna rendere piccolo  $\bar{\sigma}_{F^{-1}K}(j\omega)$ . Nel seguito, per semplicità, si ometterà la dipendenza di  $\bar{\sigma}$  e  $\underline{\sigma}$  da  $j\omega$  evidenziando invece la f.d.t. di riferimento. Pertanto si userà la seguente notazione:  $\bar{\sigma}_{F^{-1}K}(j\omega) \rightarrow \bar{\sigma}(F^{-1}K)$ . Vale la seguente relazione:

$$\bar{\sigma}(F^{-1}K) \leq \bar{\sigma}(F^{-1})\bar{\sigma}(K) = \frac{\bar{\sigma}(K)}{\underline{\sigma}(F)}. \quad (4.23)$$

Pertanto vale:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(F) &\gg \bar{\sigma}(K) \\ &\Downarrow \\ \bar{\sigma}(F^{-1}K) &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Ma d'altra parte:

$$\underline{\sigma}(F) = \underline{\sigma}(I + KG) \leq \bar{\sigma}(I + KG) \leq 1 + \bar{\sigma}(KG) \leq 1 + \bar{\sigma}(K)\bar{\sigma}(G).$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(F) \gg \bar{\sigma}(K) \quad \oplus \quad 1 + \bar{\sigma}(K)\bar{\sigma}(G) \geq \underline{\sigma}(F) \\ &\Downarrow \\ \bar{\sigma}(K) &\ll 1 + \bar{\sigma}(K)\bar{\sigma}(G) \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{\bar{\sigma}(K)} + \bar{\sigma}(G) &\gg 1 \\ &\Uparrow \\ \bar{\sigma}(G) &\gg 1 \text{ o } \bar{\sigma}(K) \ll 1. \end{aligned}$$

Dunque, alle frequenze a cui  $\bar{\sigma}(G) \not\approx 1$ , l'attività sul comando può essere solo limitata tenendo  $\bar{\sigma}(K)$  basso.

Possiamo pertanto sintetizzare come segue le specifiche di buone prestazioni di un sistema multivariabile.

**1. SENSITIVITA':**

$$\bar{\sigma}((I + GK)^{-1}) < \varepsilon.$$

**2. PROPAGAZIONE DELL'ERRORE DEI SENSORI:**

$$\bar{\sigma}([I - (I + GK)^{-1}]) < \varepsilon.$$

**3. INSEGUIMENTO DEL RIFERIMENTO:**

$$\underline{\sigma}([I - (I + GK)^{-1}]) \approx \bar{\sigma}([I - (I + GK)^{-1}]) \approx 1.$$

**4. MINIMIZZAZIONE ATTIVITA' (ENERGIA) DEL COMANDO**

$$\bar{\sigma}(K) < \varepsilon.$$

Si possono notare abbastanza facilmente i seguenti conflitti:

$$\begin{aligned} 2) &\leftrightarrow 1) \\ 3) &\leftrightarrow 2) \\ 4) &\leftrightarrow 1) \text{ e } 3). \end{aligned}$$

## 4.4 Relazione tra i guadagni principali ad anello aperto e chiuso

Per studiare queste relazioni, abbiamo bisogno delle due proprietà seguenti:

$$\Pi_1 - \max[0, \bar{\sigma}(Q) - 1] \leq \bar{\sigma}(Q + I) \leq \bar{\sigma}(Q) + 1 \quad (4.24)$$

$$\Pi_2 - \max[0, \underline{\sigma}(Q) - 1] \leq \underline{\sigma}(Q + I) \leq \underline{\sigma}(Q) + 1 \quad (4.25)$$

### 4.4.1 Sensitività

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}((I + GK)^{-1}) &= \frac{1}{\underline{\sigma}(I + GK)} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(GK) - 1} \\ &\approx \frac{1}{\underline{\sigma}(GK)}. \quad (\text{se } \underline{\sigma}(GK) \gg 1) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Dunque, come per i sistemi S.I.S.O., si **riduce la sensitività rendendo  $\underline{\sigma}(GK)$  elevato**.

### 4.4.2 Propagazione del rumore di misura

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}[I - (I + GK)^{-1}] &= \bar{\sigma}[(I + (GK)^{-1})^{-1}] = \\ &= \frac{1}{\underline{\sigma}[I + (GK)^{-1}]} < \varepsilon \\ &\quad \uparrow \\ \underline{\sigma}(GK)^{-1} \gg M &\approx \bar{\sigma}(GK) < \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.27)$$

### 4.4.3 Inseguimento del riferimento

$$\begin{aligned}
 I - (I + GK)^{-1} &\simeq I \Leftrightarrow (I + GK)^{-1} \approx 0 \\
 &\uparrow \\
 \bar{\sigma}(I + GK)^{-1} &\ll 1 \\
 &\uparrow \\
 \underline{\sigma}(I + GK) &\gg 1 \\
 &\uparrow \\
 \underline{\sigma}(GK) &\gg 1
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Dalle relazioni (4.26), (4.27), (4.28), si osserva che i conflitti tra le specifiche in anello chiuso si traducono nei seguenti conflitti in anello aperto:

$$\begin{aligned}
 (4.26) - \underline{\sigma}(GK) \text{ elevato} &\quad (4.28) - \underline{\sigma}(GK) \text{ elevato} \\
 (4.27) - \bar{\sigma}(GK) \text{ piccolo,} &\quad \bar{\sigma}(K) \text{ piccolo.}
 \end{aligned}$$

Da un punto di vista del progetto, l'unica via percorribile per risolvere questi conflitti è quella di rendere  $\underline{\sigma}(GK)$  elevato a basse frequenze e  $\bar{\sigma}(GK)$  basso ad alte frequenze.

## 4.5 Guadagni principali e luoghi caratteristici

Studiamo adesso le relazioni che intercorrono tra i luoghi caratteristici di un sistema (autovalori di  $G(j\omega)$ ) ed i guadagni principali (valori singolari di  $G(j\omega)$ ). Queste relazioni servono perchè stabiliscono dei legami tra le prestazioni e robustezza di un sistema e i suoi luoghi caratteristici, su cui sono basati i metodi classici di sintesi multivariabile.

**Definizione 16** - Una matrice quadrata si dice **normale** se:

$$Q^H(s)Q(s) = Q(s)Q^H(s). \tag{4.29}$$

--

**Lemma 2** - Sia  $Q(s)$  una matrice normale e sia:

$$Q(s) = W(s)\Lambda(s)W^{-1}(s)$$

la sua rappresentazione spettrale. Allora vale:

$$W^H(s) = W^{-1}(s). \tag{4.30}$$

--

Si può dimostrare il seguente risultato fondamentale.

**Teorema 16** - (Valori singolari  $\Leftrightarrow$  autovalori). *Sia  $Q(s)$  una matrice normale con autovalori  $\{\lambda_i(s)\}$  e valori singolari  $\{\sigma_i(s)\}$ . Allora si possono ordinare gli autovalori  $\lambda_i$  in modo che valga:*

$$\sigma_i(s) = |\lambda_i(s)|, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.31)$$

--

■

**Osservazione 16** - *Il risultato enunciato dal Teorema 16 dice che, se la matrice di ritorno è normale, allora possiamo dedurre le prestazioni dell'anello chiuso dai moduli dei luoghi caratteristici, cioè dai **guadagni caratteristici**.*

Il Teorema 16 è fondamentale per il **progetto**, perchè fornisce una tecnica di sintesi: per avere certi guadagni principali, si progetta  $K$  in modo che  $GK$  sia normale ed abbia certi *guadagni caratteristici*.

La condizione di normalità può essere interpretata come una situazione di minima sensibilità degli autovalori a perturbazioni degli elementi della matrice.

Anche se la matrice di ritorno non è perfettamente normale, vale  $|\lambda_i(s)| \approx \sigma_i(s)$  se gli autovettori sono all'incirca ortogonali. Quando gli autovettori sono decisamente non-ortogonali si dice che la matrice è **skew** (sbilanciata).

E' possibile dare la seguente misura della *skewness* di una matrice (Hung-McFarlane, 1982).

**Definizione 17** - *Sia data una **decomposizione di Schur** di  $G(j\omega)$ :*

$$G(j\omega) = S(j\omega)(D(j\omega) + T(j\omega))S^H(j\omega) \quad (4.32)$$

dove  $S(j\omega)$  è unitaria,  $D(j\omega)$  è diagonale e  $T(j\omega)$  è strettamente triangolare. Allora:

$$\mu_{sk}[G(j\omega)] = \frac{\|T(j\omega)\|_F}{\|G(j\omega)\|_F} = \frac{\sqrt{\{tr(T^H(j\omega)T(j\omega))\}}}{\sqrt{\{tr(G^H(j\omega)G(j\omega))\}}} \quad (4.33)$$

( $\|\cdot\|_F$  è la norma di Frobenius)

--

Si può dimostrare che:

$$0 \leq \mu_{sk}[G(j\omega)] \leq 1$$

dove si ha 0 in caso di normalità perfetta e 1 in caso di asimmetria completa. Se  $\mu_{sk}[G(j\omega)] \neq 0$ . Allora:

$$\underline{\sigma} \leq |\lambda_i| \leq \bar{\sigma}, \quad i = 1, \dots, m.$$

## 4.6 Norme degli operatori: norma $H_2$ e norma $H_\infty$

**Definizione 18** - Sia  $G(s)$  una matrice di f.d.t. **proprie e senza poli lungo l'asse immaginario**. Allora:

$$\text{norma } \mathbf{H}_2 : \|G(s)\|_2 = \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[G(j\omega)G^T(-j\omega)] d\omega \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4.34)$$

$$\text{norma } \mathbf{H}_\infty : \|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}[G(j\omega)]. \quad (4.35)$$

--

Si può dimostrare che entrambe le definizioni soddisfano le usuali proprietà delle norme:

$$\bullet \|G(s)\| \geq 0, \quad \|G(s)\| = 0 \Leftrightarrow G(s) = 0 \quad (4.36)$$

$$\bullet \|\alpha G(s)\| = |\alpha| \|G(s)\|, \quad \forall \alpha \in \mathcal{C} \quad (4.37)$$

$$\bullet \|G(s) + H(s)\| \leq \|G(s)\| + \|H(s)\|. \quad (4.38)$$

Inoltre la norma  $H_\infty$  è submoltiplicativa, cioè:

$$\bullet \|G(s)H(s)\|_\infty \leq \|G(s)\|_\infty \|H(s)\|_\infty. \quad (4.39)$$

**Osservazione 17** -

- In generale la norma  $H_2$  non soddisfa la (4.39)
- La (4.34) e la (4.35) si chiamano **norme degli operatori**, perchè il sistema può essere visto come un operatore che mappa  $u$  in  $y$ . Pertanto  $\|\bullet\|$  descrive la massima amplificazione possibile della mappa I/O.

Con riferimento alla (4.35), precisiamo meglio il significato fisico di  $\|\bullet\|_\infty$ . Sia  $u(t)$  l'ingresso e sia:

$$\|u\|_2 = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} u^T(\tau)u(\tau)d\tau \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.40)$$

la norma  $L_2$  nello spazio delle funzioni di ingresso. Il seguente risultato esprime il massimo guadagno I/O in termini di energia dei segnali:

**Teorema 17** - (Vidyasagar 85, Francis 87) *Sia:*

- $\|u\|_2 < \infty$
- $Y(s) = G(s)U(s)$
- $G(s)$  propria, stabile e senza poli lungo l'asse immaginario.

Allora vale:

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_u \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} \quad (4.41)$$

--

■

**Osservazione 18** - La relazione tra  $\|G(s)\|_\infty$  e i guadagni principali di  $G(s)$  è ovvia dalla definizione di  $\|\bullet\|_\infty$ . In pratica le norme degli operatori introdotte sopra vengono comunemente usate nel formulare e risolvere problemi di controllo ottimo. Ad esempio, l'LQG consiste nel determinare, se esiste, un controllore che minimizzi la  $\|\bullet\|_2$  di qualche opportuna funzione d'anello. Normalmente si parla di  $S(s)$  e  $T(s) = I - S(s)$ , come funzioni d'anello. Ad esempio, l'ottimizzazione della  $S(s)$ , comporta la minimizzazione di  $\|S(s)\|_\infty$ . Prima di chiudere questo paragrafo ricordiamo che:

$$\begin{array}{ll} L_\infty & \text{(Spazio di Lebesgue):} \quad G(s) : \|G(s)\|_\infty < \infty \\ H_\infty & \text{(Spazio di Hardy):} \quad G(s) \in L_\infty : G(s) \text{ è exp.stabile.} \end{array}$$

**Osservazione 19 -**

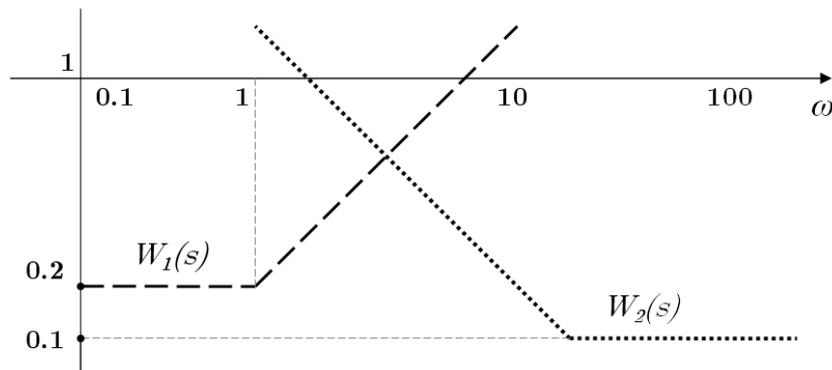
*Il picco di risonanza  $M_r$  di cui si è parlato nell'analisi e progetto dei sistemi S.I.S.O. non è altro che  $\|T(s)\|_\infty$ .*

## 4.7 Uso delle norme degli operatori come indici di prestazione

Supponiamo di avere le seguenti specifiche:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}[S(j\omega)] &\leq 0.2, & \omega \leq 1 \\ \bar{\sigma}[T(j\omega)] &\leq 0.1, & \omega \geq 50. \end{aligned}$$

Si possono sempre trovare dei filtri semplici per cui queste disuguaglianze si possono ricondurre a bound su opportune norme  $H_\infty$ .



- $W_1(s) = 0.141(1 + s) \quad \mapsto$  bound su  $\bar{\sigma}[S(j\omega)]$
- $W_2(s) = \frac{3.536}{s}(1 + 0.02s) \quad \mapsto$  bound su  $\bar{\sigma}[T(j\omega)]$ .

Dunque, le due specifiche precedenti si possono così esprimere:

$$\|W_1^{-1}(s)S(s)\|_\infty \leq 1 \quad \|W_2^{-1}(s)T(s)\|_\infty \leq 1.$$

Ciò è comodo perchè permette di esprimere un problema di sintesi come un problema di minimizzazione di una norma di operatore opportuna ( $H_\infty$ ).

# Capitolo 5

## Robustezza dei sistemi multivariabili

### 5.1 Rappresentazione dell'incertezza

#### 5.1.1 Incertezza non strutturata

$$G(s) = G_0(s) + \Delta_a(s) \quad (5.1)$$

$$G(s) = G_0[I + \Delta_u(s)] \quad (5.2)$$

$$G(s) = [I + \Delta_y(s)]G_0(s) \quad (5.3)$$

$\Delta_a(s) \rightarrow$  perturbazione additiva

$\Delta_u(s) \rightarrow$  perturbazione moltiplicativa sull'ingresso

$\Delta_y(s) \rightarrow$  perturbazione moltiplicativa sull'uscita.

Supponiamo che:

$$\|\Delta(s)\|_\infty \leq \varepsilon \quad (5.4)$$

o in generale:

$$\|W_1(s)\Delta(s)W_2(s)\|_\infty \leq 1. \quad (5.5)$$

Spesso si usano modelli misti di rappresentazione dell'incertezza. Altri tipi di strutture per rappresentare l'incertezza:

$$G(s) = (I + \Delta_y(s))G_0(s)(I + \Delta_u(s))$$

$$G(s) = G_0(s) \cdot * [I + \Delta(s)] \quad (.* = \text{prodotto di Schur, elemento per elemento})$$

$$G(s) = (I + \Delta_R)^{-1}G_0(s) \quad (\text{moltiplicativo in retroazione sull'uscita})$$

$$G(s) = N(s)D^{-1}(s), \quad \text{dove: } \begin{cases} N(s) = N_0(s) + \Delta_N(s) \\ D(s) = D_0(s) + \Delta_D(s) \end{cases}$$

$G(s) = N(s)D^{-1}(s)$  è una rappresentazione dell'incertezza tramite frazioni di matrici ( $N(s)$  e  $D(s)$  sono matrici di f.d.t. stabili, invece che matrici polinomiali).

Descrivere l'incertezza tramite norme degli operatori comporta dei vantaggi: non è necessario assumere l'esistenza di una f.d.t. reale.

Sia dato  $u : \|u\|_2 = 1 \rightsquigarrow y(t)$ .

Sia  $y_0$  l'uscita di un modello  $G_0(s)$  con ingresso  $u : \|u\|_2 = 1$ . Allora per la (5.1) si ha:

$$\|y - y_0\|_2 \leq \|\Delta_a(s)\|_\infty$$

dove  $y$  è l'uscita reale.

### 5.1.2 Incertezza strutturata

Una descrizione non strutturata dell'incertezza può essere eccessivamente cautelativa. Infatti notiamo che assumere ad esempio:

$$\|10\Delta(s)\|_\infty \leq 1 \tag{5.6}$$

include oltre alla matrice:

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}, \quad |\delta_i| \leq 0.1$$

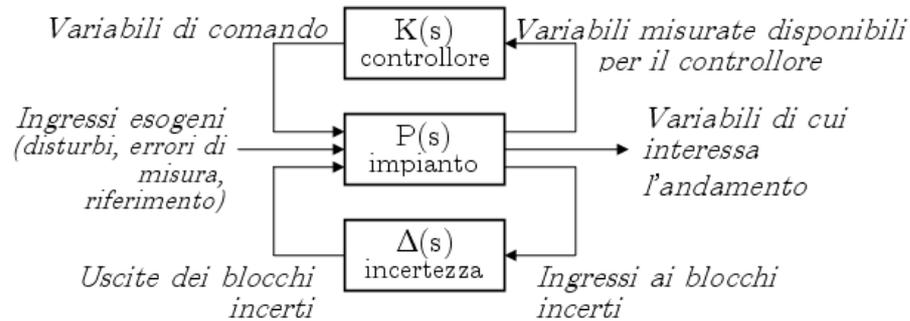
anche le matrici:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix},$$

di modo che se la prima struttura dell'incertezza è adeguata a descrivere il nostro impianto, la (5.6) risulta modellare un insieme di situazioni che mai si verifica nella realtà.

Si capisce, dunque, che la sintesi con perturbazioni non strutturate, che risulterà *enormemente più semplice* è in realtà estremamente conservativa e quindi può dare risultati negativi laddove esistono controllori anche semplicissimi che possono risolvere il problema.

Per arrivare a parlare di incertezza strutturata, si introduce intanto la seguente rappresentazione standard di un sistema in retroazione e incerto:



Nel precedente schema a blocchi

$$\Delta(s) = \text{diag}\{\Delta_1(s), \Delta_2(s), \dots, \Delta_n(s)\}. \quad (5.7)$$

$\Delta_i(s)$  può essere scalare o matriciale. Tramite opportuni scalamenti in  $P$ , si può fare sempre in modo che:

$$\|\Delta_i(s)\|_\infty \leq 1.$$

#### Osservazione 20 -

1.  $\Delta(s) = 0 \Rightarrow$  sistema di controllo nominale;
2. Conservatività residua: i  $\Delta_i(s)$  sono in generale complessi.

## 5.2 Stabilità robusta

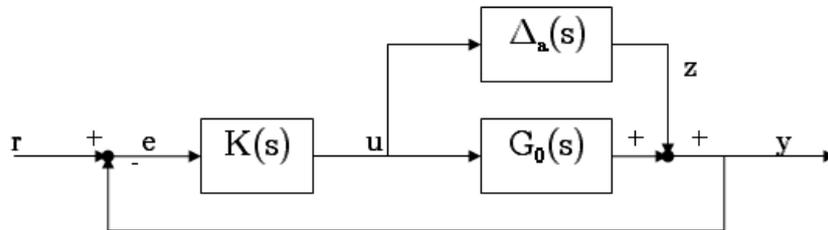
### 5.2.1 Incertezza non strutturata

Consideriamo il modello additivo:

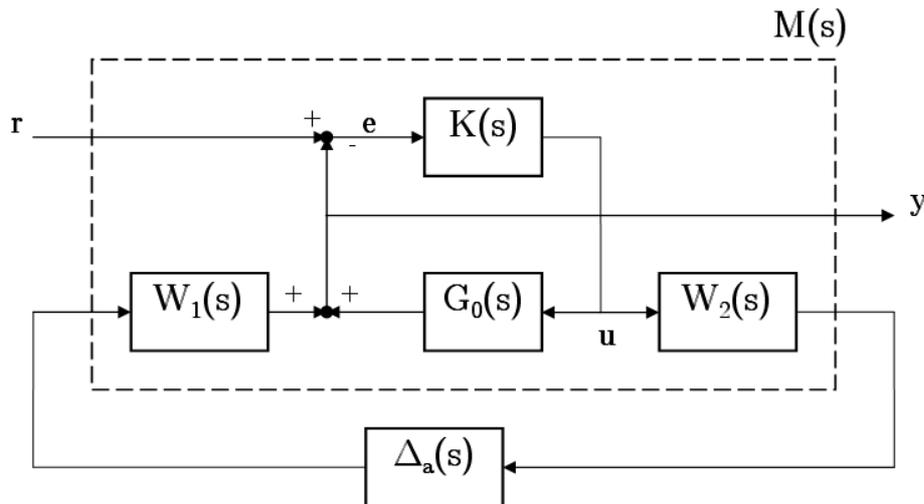
$$G(s) = G_0(s) + \Delta_a(s) \tag{5.8}$$

con

$$\Delta_a(s) = W_1(s)\tilde{\Delta}_a(s)W_2(s), \quad \|\tilde{\Delta}_a(s)\| \leq 1. \tag{5.9}$$



Lo schema a blocchi della figura precedente si può trasformare nella forma canonica  $M - \Delta$  rappresentata nella seguente figura. Nello schema a blocchi precedente si assume



che  $K(s)$  sia stato scelto in modo da stabilizzare  $G_0(s)$ . E' possibile scrivere le seguenti relazioni:

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ \tilde{u}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ \tilde{z}(s) \end{bmatrix}$$

dove:

$$\begin{aligned} M_{11}(s) &= (I + G_0(s)K(s))^{-1}G_0(s)K(s) \\ M_{12}(s) &= (I + G_0(s)K(s))^{-1}W_1(s) \\ M_{21}(s) &= W_2(s)(I + K(s)G_0(s))^{-1}K(s) \\ M_{22}(s) &= -W_2(s)(I + K(s)G_0(s))^{-1}K(s)W_1(s). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Per verificare se il sistema rimane stabile in presenza di  $\tilde{\Delta}_a(s)$ , dobbiamo verificare se la combinazione in retroazione di  $M_{22}$  e  $\tilde{\Delta}_a(s)$  rimane stabile, per tutti i  $\tilde{\Delta}_a(s)$  ammissibili. Le ipotesi di partenza assicurano che  $M_{22}(s)$  e  $\tilde{\Delta}_a(s)$  **siano stabili**. Dunque, il sistema può divenire instabile solo se uno o più dei luoghi caratteristici di  $-M_{22}(s)\tilde{\Delta}_a(s)$  circonda il punto  $(-1, 0)$ . Indichiamo con  $\lambda(M_{22}\tilde{\Delta}_a)$  un generico autovalore di  $M_{22}(s)\tilde{\Delta}_a(s)$ . Sappiamo che:

$$|\lambda(M_{22}\tilde{\Delta}_a)| \leq \rho((M_{22}\tilde{\Delta}_a)) \leq \bar{\sigma}((M_{22}\tilde{\Delta}_a)) \tag{5.11}$$

dove  $\rho(\bullet)$  è il *raggio spettrale*. Dunque se vale:

$$\bar{\sigma}((M_{22}\tilde{\Delta}_a)) < 1 \tag{5.12}$$

ovvero:

$$\|M_{22}(s)\tilde{\Delta}_a(s)\|_\infty < 1,$$

pertanto non si hanno incircolamenti nel punto critico. D'altronde, sappiamo che:

$$\|M_{22}(s)\tilde{\Delta}_a(s)\|_\infty \leq \|M_{22}(s)\|_\infty \|\tilde{\Delta}_a(s)\|_\infty.$$

Ma per ipotesi vale  $\|\tilde{\Delta}_a(s)\|_\infty \leq 1$ . Dunque, se:

$$\|M_{22}(s)\|_\infty < 1, \tag{5.13}$$

il sistema perturbato rimane stabile a fronte di qualunque perturbazione ammissibile. La quantità  $(\|M_{22}(s)\|_\infty)^{-1}$  si chiama **margin di guadagno in norma  $H_\infty$** . Si può comunque dimostrare che se l'unica restrizione su  $\tilde{\Delta}_a(s)$  è che valga  $\|\tilde{\Delta}_a(s)\|_\infty \leq 1$ , allora la (5.13) è anche **condizione necessaria** per la stabilità robusta. Dunque, possiamo enunciare il seguente teorema:

**Teorema 18 - (Small gain)** *Sia dato un sistema in retroazione con  $G_1(s)$  in catena diretta e  $G_2(s)$  in catena di retroazione. Sia  $G_1(s)$  nota e stabile e  $G_2(s)$  non nota ma stabile e tale che  $\|G_2(s)\|_\infty \leq 1$ . **Condizione necessaria e sufficiente** perchè l'anello chiuso sia stabile  $\forall G_2(s) : \|G_2(s)\| \leq 1$  è che:*

$$\|G_1(s)\|_\infty \leq 1.$$

--

### **Dimostrazione**

Dimostriamo ora la necessarietà della condizione, riprendendo il discorso precedente all'enunciato del teorema. Supponiamo che:

$$\|M_{22}(s)\|_\infty = 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0. \quad (5.14)$$

La seguente esprime la S.V.D. di  $M_{22}$ :

$$M_{22}(s) = Y(s)\Sigma(s)U^H(s). \quad (5.15)$$

Consideriamo la perturbazione:

$$\tilde{\Delta}_a(s) = -e^{-sd}U(s)Y^H(s) \quad (d \text{ è scalare reale}) \quad (5.16)$$

↓

$$-M_{22}(s)\tilde{\Delta}_a(s) = e^{-sd}Y(s)\Sigma(s)Y^H(s) \quad (5.17)$$

che è **normale**. Dunque:

$$\exists \omega_0 : |\lambda_{max}(M_{22}(j\omega)\tilde{\Delta}_a(j\omega))| = \bar{\sigma}(M_{22}(j\omega)) = 1 + \varepsilon.$$

Siccome dalla (5.17) si vede che i luoghi caratteristici sono:

$$e^{-sd}\sigma_i(M_{22}),$$

si può sempre scegliere  $d$  in modo da far circondare il punto  $-1$  in senso orario. ■

**Osservazione 21** - *La condizione  $\|M_{22}(s)\|_\infty < 1$  vale sempre indipendentemente dal modello di perturbazione adottato (moltiplicativo, additivo, etc.). Per certi tipi di perturbazione si può ipotizzare che  $\Delta_0(s)$  sia instabile, ma bisognerà assumere che  $G_0(s)$  e  $G(s)$  abbiano lo stesso numero di poli a destra.*

### 5.3 Incertezza strutturata

In questo caso  $\Delta(s)$  ha una struttura diagonale a blocchi, con  $\Delta_j : \|\Delta_j\|_\infty \leq 1$ . In questo caso la condizione

$$\|M_{22}\|_\infty < 1$$

è certamente **sufficiente** per la stabilità robusta, ma non più necessaria, perchè la  $\Delta$  che destabilizza non può essere scelta arbitrariamente tra tutte le perturbazioni tali che  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ . Indichiamo con  $BD_\delta$  l'insieme delle perturbazioni block-diagonali, stabili e tali per cui:

$$\|\Delta_j\|_\infty \leq \delta.$$

La struttura  $BD_\delta$  è definita formalmente come segue:

$$BD_\delta = BD_\delta(m_1, \dots, m_n; k_1, \dots, k_n). \quad (5.18)$$

La (5.18) indica che  $BD_\delta$  contiene  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  blocchi, essendo ciascun blocco ripetuto  $m_i$  volte ed avente dimensione  $k_i \times k_i$ . Allora una perturbazione ammissibile destabilizzerà l'anello chiuso se e solo se:

$$\exists \omega : \det[I - M_{22}(j\omega)\Delta(j\omega)] = 0 \quad \text{per qualche } \Delta \in BD_\delta. \quad (5.19)$$

Possiamo definire:

$$\mu(M_{22}(j\omega)) = \begin{cases} 0, & \text{se } \det[I - M_{22}\Delta] \neq 0, \forall \Delta \in BD_\infty \\ \{\min_{\Delta \in BD_\infty} (\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) : \det[I - M_{22}\Delta] = 0)\}^{-1}. & \end{cases} \quad (5.20)$$

Si può definire:

$$\|M_{22}(s)\|_\mu \triangleq \sup_\omega \mu[M_{22}(j\omega)]. \quad (5.21)$$

Attenzione:  $\|M_{22}(s)\|_\mu$  non è una norma. Si definisce  $\mu(M_{22}(j\omega))$  **valore singolare strutturato** e dipende da  $M_{22}(j\omega)$  e da  $BD_\delta$ .

**Teorema 19 - (Small  $\mu$ )** Il sistema  $(M, \Delta)$  in figura 5.1 rimane stabile  $\forall \Delta \in BD_1$  se e solo se:

$$\|M_{22}(s)\|_\mu < 1.$$

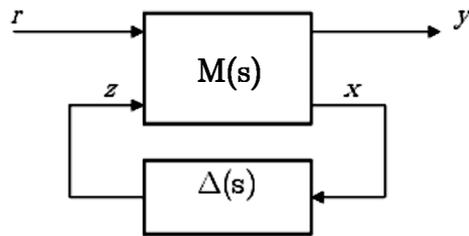


Figura 5.1: Sistema  $(M, \Delta)$ .

**Proprietà del  $\mu$**

$$\mu(\alpha H(j\omega)) = |\alpha| \mu(H(j\omega))$$

$$\mu(I) = 1$$

$$\mu(A(j\omega)B(j\omega)) \leq \bar{\sigma}(A(j\omega))\mu(B(j\omega)), \quad \text{con } A(j\omega), B(j\omega) \text{ quadrate}$$

$$\mu(\Delta(j\omega)) = \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)), \quad \Delta(j\omega) \in BD_\delta$$

$$n = 1, m_1 = 1 \rightarrow \mu(H(j\omega)) = \bar{\sigma}(H(j\omega))$$

$$n = 1, k_1 = 1 \rightarrow \mu(H(j\omega)) = \rho(H(j\omega)) \quad (\text{dove } \rho(H(j\omega)) = \max_i(|\lambda_i(H(j\omega))|))$$

Sia  $D$  una matrice diagonale, positiva con la stessa struttura di  $\Delta(j\omega)$ :

$$D = \text{diag} \{d_1 I_{k_1}, \dots, d_{m_1} I_{k_1}, d_{m_1+1} I_{k_2}, \dots, d_{m_n} I_{k_n}\}$$

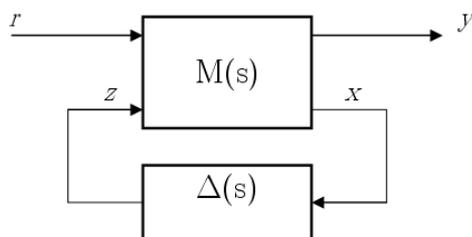
Allora:

$$\mu(DH(j\omega)D^{-1}) = \mu(H(j\omega)).$$

Sia  $U(j\omega)$  una matrice unitaria con la stessa struttura di  $BD_\delta$ , allora:

$$\max_{U(j\omega)} \rho[U(j\omega)H(j\omega)] \leq \mu[H(j\omega)] \leq \inf_D \bar{\sigma}[DH(j\omega)D^{-1}].$$

**5.4 Prestazioni robuste**



$$M(s) = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ x(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ z(s) \end{bmatrix}$$

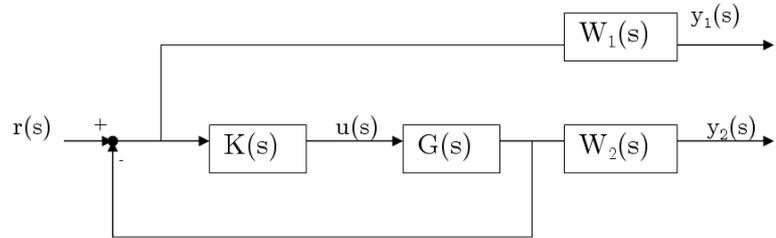
La nostra specifica sia data da:

$$\|M_{11}(s)\|_{\infty} < 1 \leftarrow \text{prestazione nominale.}$$

**Esempio**

Consideriamo la prestazione:

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1(s) & S(s) \\ W_2(s) & T(s) \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1$$



In questo caso il vettore  $y(s)$  vale:

$$y(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(s)S(s) \\ W_2(s)T(s) \end{bmatrix} r(s).$$

Dunque:

$$M_{11}(s) = \begin{bmatrix} W_1(s)S(s) \\ W_2(s)T(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(s)(I + G(s)K(s))^{-1} \\ W_2(s)(I + G(s)K(s))^{-1}G(s)K(s) \end{bmatrix}.$$

Supponiamo ora di inserire l'incertezza ( $\Delta \neq 0$ ), allora:

$$\begin{cases} y(s) = M_{11}(s)r(s) + M_{12}(s)z(s) \\ x(s) = M_{21}(s)r(s) + M_{22}(s)z(s) \\ z(s) = \Delta(s)x(s) \end{cases},$$

da cui:

$$x(s) = M_{21}(s)r(s) + M_{22}(s)\Delta(s)x(s) \rightarrow x(s) = [I - M_{22}(s)\Delta(s)]^{-1}M_{21}(s)r(s).$$

Sostituendo la precedente nella 1° equazione:

$$\begin{aligned} y(s) &= M_{11}(s)r(s) + M_{12}(s)\Delta(s)[I - M_{22}(s)\Delta(s)]^{-1}M_{21}(s)r(s) = \\ &= [M_{11}(s) + M_{12}(s)\Delta(s)[I - M_{22}(s)\Delta(s)]^{-1}M_{21}(s)]r(s). \end{aligned}$$

Dunque, se:

$$\Delta(s) = \text{diag} \{ \Delta_1(s), \Delta_2(s), \dots, \Delta_n(s) \}, \quad \|\Delta_i\|_{\infty} \leq 1,$$

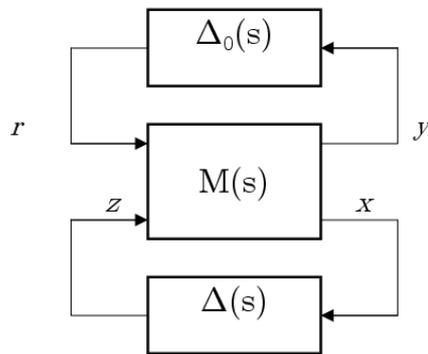
allora si dice che il sistema garantisce la robustezza della prestazione se le due condizioni:

$$\begin{cases} (1) & \|M_{11}(s) + M_{12}(s)\Delta(s)[I - M_{22}(s)\Delta(s)]^{-1}M_{21}(s)\|_\infty < 1 \\ (2) & \|M_{22}(s)\|_\mu < 1 \end{cases} \quad (5.22)$$

valgono per tutte le  $\Delta$  ammissibili.

Supponiamo che invece di imporre la specifica avessimo aggiunto un blocco  $\Delta_0$  tra  $r(s)$  e  $y(s)$  tale che:

$$\|\Delta_0\|_\infty \leq 1.$$



La stabilità robusta di questo sistema aumentato è assicurata se:

$$\|M(s)\|_\mu < 1, \quad (5.23)$$

dove  $\|\bullet\|_\mu$  è calcolato rispetto alla struttura

$$diag\{\Delta_0(s), \Delta(s)\} = diag\{\Delta_0(s), \Delta_1(s), \dots, \Delta_n(s)\}.$$

Poichè questa condizione implica la stabilità per perturbazioni  $diag\{\Delta_0(s), 0\}$  e  $diag\{0, \Delta(s)\}$ , la (5.23) implica sicuramente che:

$$\|M_{11}(s)\|_\infty < 1 \quad \text{e} \quad \|M_{22}(s)\|_\mu < 1.$$

(Prestazioni nominali)      (Stabilità robusta)

**Teorema 20** - (Robustezza delle prestazioni) *La prima delle condizioni (5.22) è verificata  $\forall \Delta(s) \in BD_1$  insieme con la seconda condizione (5.22) se e solo se:*

$$\|M(s)\|_\mu < 1$$

dove  $\|M(s)\|_\mu$  è calcolato rispetto alla struttura  $diag\{\Delta_0(s), \Delta(s)\}$ .

# Capitolo 6

## Controllo Nonlineare

### 6.1 Stabilità assoluta

Sia dato il sistema in retroazione di Fig. 6.1:

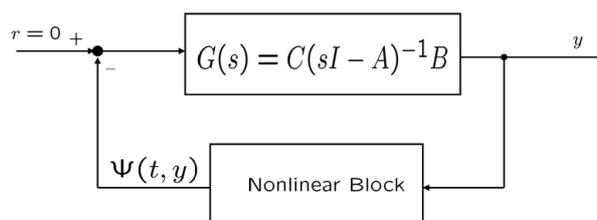


Figura 6.1: Sistema in retroazione con un blocco non lineare.

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ u &= -\Psi(t, y) \end{cases} \quad (6.1)$$

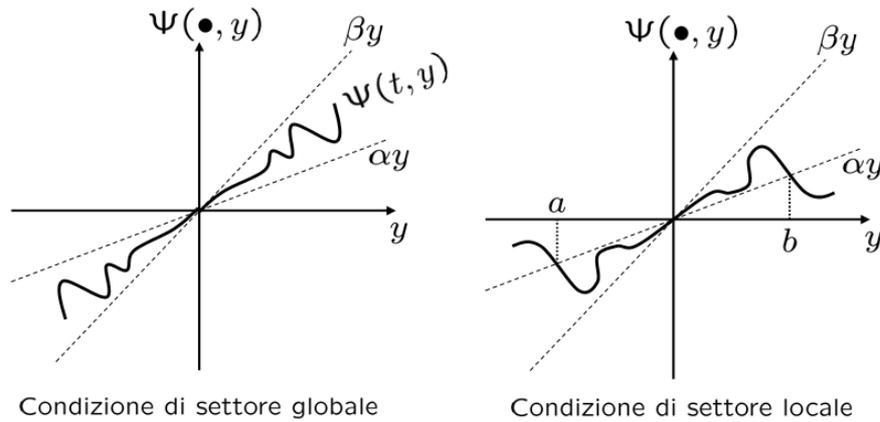
dove:  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ , e  $D = 0$ , cioè  $G(s)$  è strettamente propria (ipotesi non strettamente necessaria).

Richiederemo che la funzione non lineare  $\Psi$  soddisfi una **condizione di settore** (non-linearità a settore). Consideriamo, per iniziare, il caso  $p = 1$ .

**Definizione 19** -  $\Psi$  soddisfa una condizione di settore se  $\exists \alpha, \beta, a, b : \beta > \alpha, a < 0, b > 0$ :

$$\alpha y^2 \leq y\Psi(t, y) \leq \beta y^2, \quad \forall y \in [a, b], \quad \forall t \geq 0. \quad (6.2)$$

--



Se  $a \rightarrow -\infty$  e  $b \rightarrow +\infty$ , allora si dice che la condizione di settore vale globalmente. E' facile verificare che la (6.2) si può riscrivere come segue:

$$[\Psi(t, y) - \alpha y][\Psi(t, y) - \beta y] \leq 0, \quad \forall y \in [a, b], \quad \forall t \geq 0. \quad (6.3)$$

Veniamo ora al caso in cui  $p \geq 1$ . Consideriamo inizialmente il caso di multi-nonlinearià disaccoppiate:

$$\Psi(t, y) = \begin{bmatrix} \Psi_1(t, y_1) \\ \Psi_2(t, y_2) \\ \vdots \\ \Psi_p(t, y_p) \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Supponiamo che  $\forall i, i = 1, \dots, p$  valga la condizione di settore vista in precedenza. Possiamo definire:

$$K_{min} = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}, \quad K_{max} = \text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p\}, \quad \Gamma = \{y \in \mathbb{R}^p : a_i \leq y_i \leq b_i\}.$$

Se la (6.2) vale  $\forall i$ , allora vale sicuramente la seguente disuguaglianza:

$$[\Psi(t, y) - K_{min}y]'[\Psi(t, y) - K_{max}y] \leq 0, \quad \forall y \in \Gamma, \quad \forall t \geq 0. \quad (6.5)$$

E' da notare che la disuguaglianza (6.5) può valere anche per nonlinearià MIMO più generali, per opportuni valori delle matrici  $K_{min}$  e  $K_{max}$ .

**Esempio**

Supponiamo di sapere che:

$$\|\Psi(t, y) - Ly\|_2 \leq \gamma \|y\|_2, \quad \forall y \in \Gamma \subset \mathbb{R}^p, \quad \forall t \geq 0.$$

Ponendo:

$$K_{min} = L - \gamma I \quad e \quad K_{max} = L + \gamma I$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} & \|\Psi(t, y) - Ly\|_2^2 - \gamma^2 \|y\|_2^2 = \\ & = [\Psi(t, y) - Ly]'[\Psi(t, y) - Ly] - \gamma [y]'[y] = \\ & = [\Psi(t, y) - Ly]'[\Psi(t, y) - Ly] - \gamma [y]'[y] + \gamma [\Psi(t, y) - Ly]'[y] - \gamma [\Psi(t, y) - Ly]'[y] = \\ & = [(\Psi(t, y) - Ly) + \gamma y]'[(\Psi(t, y) - Ly) - \gamma y] = \\ & = [\Psi(t, y) - K_{min}y]'[\Psi(t, y) - K_{max}y] \leq 0. \end{aligned}$$

Dunque, ricordando che si era posto  $K_{min} = L - \gamma I$  e  $K_{max} = L + \gamma I$ :

$$\|\Psi(t, y) - Ly\|_2^2 - \gamma^2 \|y\|_2^2 = [\Psi(t, y) - K_{min}y]'[\Psi(t, y) - K_{max}y] \leq 0$$

•

**Definizione 20** - Una nonlinearità statica  $\Psi : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  soddisfa una condizione di settore se:

$$[\Psi(t, y) - K_{min}y]'[\Psi(t, y) - K_{max}y] \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall y \in \Gamma \subset \mathbb{R}^p \quad (6.6)$$

per assegnate matrici  $K_{min}$  e  $K_{max}$ , dove  $K_{max} - K_{min}$  è una matrice simmetrica definita positiva e l'interno di  $\Gamma$  è connesso e contiene l'origine.

Il problema che ci poniamo adesso è quello di studiare se il sistema (6.1) è globalmente asintoticamente stabile, qualunque sia la nonlinearità  $\Psi(\cdot, \cdot)$ , purchè soddisfi la condizione di settore (6.6). Questo problema è noto come **problema di Lur'e** e la relativa stabilità va sotto il nome di **stabilità assoluta** (condizione di settore soddisfatta globalmente).

**Definizione 21 - (Stabilità assoluta)** Si consideri il sistema (6.1) dove  $\Psi(\cdot, \cdot)$  soddisfa una condizione di settore del tipo (6.6). Si dice che il sistema è **assolutamente stabile** se l'origine è globalmente, uniformemente e asintoticamente stabile per ogni nonlinearità nel settore dato.

--

Studieremo la stabilità assoluta tramite l'uso di due funzioni di Lyapunov:

- 1)  $V(x) = x'Px; \quad P = P' > 0;$
- 2)  $V(x) = x'Px + \eta \int_0^y \Psi'(\sigma)Kd\sigma; \quad P = P' > 0, \quad \eta \geq 0.$

La seconda è detta funzione di Lyapunov del tipo *Lur'e*. In questo caso si assume che  $\Psi$  sia tempo-invariante e tale per cui esista positivo l'integrale.

## 6.2 Funzioni razionali reali positive

**Definizione 22 - (PR)** Una matrice ( $p \times p$ ) di funzioni razionali proprie  $Z(s)$  si dice **reale positiva (PR)** se:

1.  $z_{ij}(s)$  sono analitiche per  $\text{Re}[s] > 0 \forall i, j = 1, \dots, p;$
2. ogni eventuale polo immaginario di  $z_{ij}(s)$  è semplice e la matrice dei residui semidefinita positiva e Hermitiana;
3.  $\forall \omega$  tale che  $j\omega$  non è polo vale  $Z(j\omega) + Z'(-j\omega) \geq 0;$

--

**Definizione 23 - (SPR)** Una funzione di trasferimento  $Z(s)$  si dice **SPR** se  $Z(s - \varepsilon)$  è PR per qualche  $\varepsilon > 0$ .

--

**Osservazione 22** - Per  $p = 1$  la condizione 3 della definizione (22) diventa  $\text{Re}[Z(j\omega)] \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$ , che significa che il diagramma di Nyquist di  $Z(j\omega)$  giace nel semipiano chiuso di destra.

Vale il seguente lemma:

**Lemma 3** - Sia  $Z(j\omega)$  una matrice ( $p \times p$ ) di funzioni di trasferimento razionali e proprie e tali che  $\det[Z(s) + Z(-s)] \neq 0$  per quasi tutti i valori di  $s$  ( $Z(s) + Z(-s)$  ha rango normale pari a  $p$ ). Allora  $Z(s)$  è SPR se e solo se:

a)  $Z(s)$  è Hurwitz ( $z_{ij}(s)$  sono Hurwitz);

b)  $Z(j\omega) + Z'(-j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

e inoltre vale una delle tre seguenti condizioni:

c1)  $Z(\infty) + Z'(\infty) > 0$

c2)  $Z(\infty) + Z'(\infty) = 0$  e  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2(Z(j\omega) + Z'(-j\omega)) > 0$ ;

c3)  $Z(\infty) + Z'(\infty) \geq 0$  e:

$$\exists \sigma_0 > 0, \omega > 0 : \quad \omega^2 \sigma_{\min}[Z(j\omega) + Z'(-j\omega)] \geq \sigma_0, \quad \forall |\omega| \geq \omega_0.$$

--

### Esempi

Es 1)  $Z(s) = \frac{1}{s}$  è PR, ma non SPR.

Es 2)  $Z(s) = \frac{1}{s+a}, a > 0$  è PR e SPR.

Es 3)  $Z(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$ , **non** è PR.

**Osservazione 23** - In virtù della condizione 3 della Def.22, ogni funzione scalare con grado relativo  $> 1$  non può essere PR per via dell'Osservazione 22.

Es 4)  $Z(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det[Z(s) + Z'(-s)] \equiv 0$

Dunque non possiamo applicare il Lemma 3. Tuttavia dalle Definizioni 22 e 23 risulta che  $Z(s)$  è PR e SPR.

Es 5)  $Z(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & 2s+1 \end{bmatrix}$  è SPR per il Lemma 3 con  $c1$ .

Es 6)  $Z(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{-1}{s+2} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$  è SPR per il Lemma 3 con  $c2$ .

•

### 6.3 Il Lemma di Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) o della Positive Realness (PR)

**Lemma 4 - (KYP o PR) Sia:**

$$Z(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

una matrice  $p \times p$  di funzioni di trasferimento, con:

- $A$ : Hurwitz
- $(A,B)$ : controllabile
- $(A,C)$ : osservabile

Allora  $Z(s)$  è SPR se e solo se

- $\exists P > 0$  simmetrica
- $\exists W, L, \varepsilon > 0$  tali che:

$$\begin{cases} PA + A'P = -L'L - \varepsilon P \\ PB = C' - L'W \\ W'W = D + D' \end{cases} \quad (6.7)$$

--

**Osservazione 24** - Questo Lemma è importante perchè lega la proprietà SPR all'esistenza di una opportuna funzione di Lyapunov.

## 6.4 Criterio del cerchio

Supponiamo di avere il sistema (6.1), con  $A$  asintoticamente stabile e  $\Psi(\cdot, \cdot)$  tale che:

$$\Psi'(t, y)[\Psi(t, y) - Ky] \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall y \in \Gamma \subset \mathbb{R}^p, \quad (6.8)$$

dove  $K > 0$  e simmetrica.

Consideriamo la seguente funzione di Lyapunov (LF):

$$V(x) = x'Px, \quad P > 0. \quad (6.9)$$

Calcoliamo la derivata  $\dot{V}(t, x)$  lungo la traiettoria del sistema (6.1):

$$\dot{V}(t, x) = x'(PA + A'P)x - 2x'PB\Psi(t, y).$$

Dalla (6.8) si trova che:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &\leq x'(PA + A'P)x - 2x'PB\Psi(t, y) - 2\Psi'(t, y)[\Psi(t, y) - Ky] \\ &= x'(PA + A'P)x + 2x'(C'K - PB)\Psi(t, y) - 2\Psi'(t, y)\Psi(t, y) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Supponiamo che  $\exists P = P' > 0$ ,  $L$  ed  $\varepsilon > 0$  tali che:

$$PA + A'P = -L'L - \varepsilon P \quad (6.11)$$

$$PB = C'K - \sqrt{2}L'. \quad (6.12)$$

Allora la (6.10) diventa:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &\leq -\varepsilon x'Px - x'L'Lx + 2\sqrt{2}x'L'\Psi(t, y) - 2\Psi'(t, y)\Psi(t, y) = \\ &= -\varepsilon x'Px - (Lx - \sqrt{2}\Psi(t, y))'(Lx - \sqrt{2}\Psi(t, y)) \\ &\leq -\varepsilon x'Px. \end{aligned}$$

Dunque, se  $\exists P > 0$ ,  $L$  ed  $\varepsilon$  tali che valgano la (6.11) e la (6.12), allora  $\dot{V}(t, x) \leq 0$ . Dal Lemma KYP si deduce che la (6.11) e la (6.12) valgono se e solo se:

$$Z(s) = I + KC(sI - A)^{-1}B \quad \text{è SPR.}$$

**Osservazione 25** -  $(A, KC)$  è osservabile perchè lo è  $(A, C)$  e  $K$  è nonsingolare. Dunque possiamo enunciare il seguente Lemma.

Sia  $\mathcal{H} \triangleq \{A: A \text{ è Hurwitz}\}$  l'insieme delle matrici  $A$  asintoticamente stabili.

**Lemma 5** - Dato il sistema (6.1), con  $A \in \mathcal{H}$ ,  $(A, B)$  controllabile,  $(A, C)$  osservabile e  $\Psi$  tale che soddisfi la condizione di settore (6.8). Allora il sistema è **assolutamente stabile** se  $Z(s) = I + KG(s)$  è SPR.

**Osservazione 26** - La restrizione su  $A$  ( $A \in \mathcal{H}$ ) si può eliminare usando ciò che si chiama *loop-transformation* o *pole-shifting*.

Dunque si arriva al seguente enunciato del criterio del cerchio multivariabile.

**Teorema 21 - (Criterio del cerchio)** Sia dato il sistema (6.1), con  $(A, B)$  controllabile,  $(A, C)$  osservabile e  $\Psi(\cdot, \cdot)$  che soddisfa la condizione di settore (6.5) globalmente. Allora il sistema è **assolutamente stabile** se:

- i)  $G_T(s) = G(s)[I + K_{min}G(s)]^{-1} \in \mathcal{H}$
- ii)  $Z_T(s) = [I + K_{max}G(s)][I + K_{min}G(s)]^{-1}$  è *SPR*.

---

**Osservazione 27** - Per  $K_{min} = 0$  il teorema si riduce al Lemma precedente. Inoltre, dal Lemma 3 e dalla considerazione che  $Z_T(\infty) = I$ , si deduce che  $Z_T(s)$  è *SPR* se e solo se:

$$\begin{cases} Z_T(s) \in \mathcal{H} \\ Z_T(j\omega) + Z_T'(-j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Consideriamo ora il caso  $p = 1$  (sistema SISO). In questo caso la condizione di settore si esprime così (vedi la (6.2)):

$$\alpha y^2 \leq y\Psi(t, y) \leq \beta y^2, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall y \in [a, b] \quad (a < 0, b > 0).$$

In tal caso le condizioni del criterio del cerchio diventano:

$$\frac{G(s)}{1 + \alpha G(s)} \in \mathcal{H} \tag{6.13}$$

$$Z_T(s) = \frac{1 + \beta G(s)}{1 + \alpha G(s)} \text{ è } SPR. \tag{6.14}$$

La relazione (6.14) si traduce nelle seguenti condizioni:

$$Z_T(s) = \frac{1 + \beta G(s)}{1 + \alpha G(s)} \in \mathcal{H} \quad \& \quad Re \left[ \frac{1 + \beta G(j\omega)}{1 + \alpha G(j\omega)} \right] > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \tag{6.15}$$

(a)
(b)

Per interpretare la (6.15-b) in termini di diagramma di Nyquist di  $G(s)$  è opportuno distinguere tre casi, in funzione del segno di  $\alpha$ .

1° caso:  $\beta > \alpha > 0$ .

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{\frac{1}{\beta} + G(j\omega)}{\frac{1}{\alpha} + G(j\omega)} \right] > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Sia:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\alpha} + G(j\omega) \\ b = \frac{1}{\beta} + G(j\omega). \end{cases}$$

La parte reale del rapporto fra  $b$  ed  $a$  è positiva se la differenza di fase tra  $a$  e  $b$  è minore di  $\frac{\pi}{2}$ , cioè:

$$|\theta_1 - \theta_2| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{Re} \left[ \frac{b}{a} \right] > 0.$$

E' facile verificare che questa condizione è vera se e solo se  $G(j\omega)$  non invade il cerchio  $D(\alpha, \beta)$ .

Inoltre, considerando la (6.15-a), dal criterio di Nyquist sappiamo che  $Z_T(s)$  è stabile se e solo se:

- $G(j\omega)$  non passa per il punto  $(-\frac{1}{\alpha}, 0)$
- $G(j\omega)|_{-\infty}^{-\infty}$  compie  $m$  rotazioni antiorarie intorno al punto  $(-\frac{1}{\alpha}, 0)$ , essendo  $m$  il numero di instabilità di  $G(s)$

Dunque, riassumendo, possiamo enunciare il seguente:

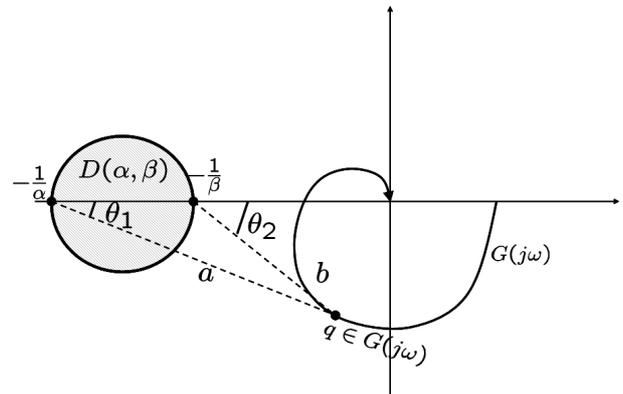
**Criterio del cerchio (SISO<sub>1</sub>)** ( $\beta > \alpha > 0$ ). *Il sistema è assolutamente stabile se  $G(j\omega)|_{-\infty}^{-\infty}$  compie  $m$  rotazioni antiorarie intorno al cerchio  $D(\alpha, \beta)$ , dove  $m$  è il numero di poli instabili di  $G(s)$ .*

2° caso:  $\beta > \alpha = 0$ .

In questo caso è facile verificare che la condizione del criterio diventa:

**Criterio del cerchio (SISO<sub>2</sub>)** ( $\beta > \alpha = 0$ ). *Il sistema è assolutamente stabile se:*

- $G(s) \in \mathcal{H}$
- $\operatorname{Re}[G(j\omega)] > -\frac{1}{\beta}, \forall \omega \in \mathbb{R}.$



3° caso:  $\beta > 0 > \alpha$ .

In questo caso la (6.15 (b)) è equivalente a:

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{\frac{1}{\beta} + G(j\omega)}{\frac{1}{\alpha} + G(j\omega)} \right] < 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (6.16)$$

Ripetendo i ragionamenti di prima, si trova che la (6.16) vale solo se il diagramma di  $G(j\omega)$  giace nel cerchio  $D(\alpha, \beta)$ . Poichè  $G(j\omega)|_{-\infty}^{-\infty}$  non può circondare  $-\frac{1}{\alpha}$  (per il motivo precedente), se ne deduce che affinché  $Z_T(s)$  sia stabile deve esserlo anche  $G(s)$ . Dunque vale il seguente risultato.

**Criterio del cerchio (SISO<sub>3</sub>)** ( $\beta > 0 > \alpha$ ). *Il sistema è assolutamente stabile se:*

- $G(s) \in \mathcal{H}$
- $G(j\omega)|_{-\infty}^{-\infty} \in D(\alpha, \beta)$ .

**Esempio 1**

Sia data:

$$G(s) = \frac{4}{(s+1)(1+\frac{1}{2}s)(1+\frac{1}{3}s)}$$

Applichiamo il caso 3. Determiniamo un disco  $D(\alpha, \beta)$  che contenga  $G(j\omega)|_{-\infty}^{-\infty}$ . Ad esempio, potremmo considerare il cerchio di raggio minimo centrato in  $O$  e contenente  $G(j\omega)$ :

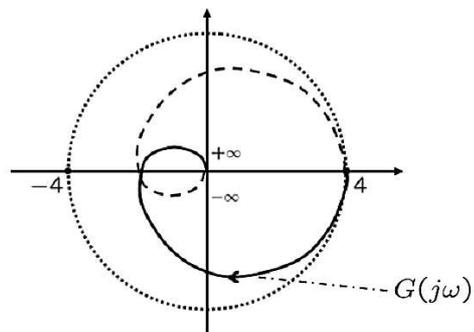
$$D(-\gamma_2, \gamma_2).$$

A tal fine bisogna determinare  $\gamma_2$  tale che:

$$\gamma_2 \gamma_1 = 1, \text{ con } \gamma_1 = \sup_{\omega} |G(j\omega)|.$$

In questo caso si trova  $\gamma_2 = 0.25$ . E' ovvio che qualunque  $\gamma_2$  tale che  $\gamma_2 \gamma_1 < 1$  va bene, cioè permette di mostrare l'assoluta stabilità del sistema. Dunque si conclude che il sistema è assolutamente stabile nel settore  $(-0.25, 0.25)$ . La cosa interessante è che giocando sullo shaping del cerchio che include  $G(j\omega)$  si possono ottenere diverse regioni di assoluta stabilità in termini di ampiezza del settore della nonlinearità. Ad esempio, prendendo il minimo cerchio che include  $G(j\omega)$  si ottiene:

$$\mathcal{C} = \{C = (1.5, 0), R = 2.834\} \Rightarrow D(-\frac{1}{4.4}, \frac{1}{1.4}) \Rightarrow \text{settoare a.s.: } (-0.227, 0.714).$$



Oppure si può assumere  $\alpha = 0$  e si trova

$$D(0, 1.167) \Rightarrow -\frac{1}{\beta} = -0.857 \text{ (retta verticale tangente a } G(j\omega)\text{).}$$

**Esempio 2**

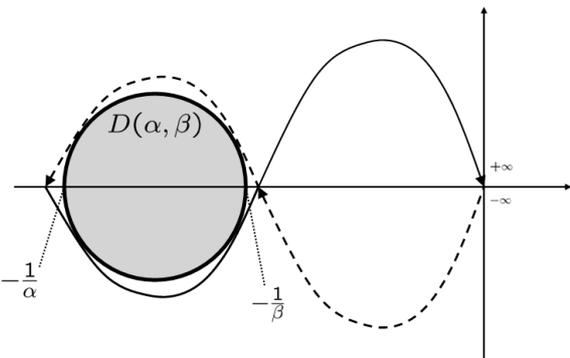
Sia data:

$$G(s) = \frac{4}{(s - 1)(1 + \frac{1}{2}s)(1 + \frac{1}{3}s)}$$

Poichè  $G(s) \notin \mathcal{H}$ , allora dobbiamo far riferimento al caso  $\beta > \alpha > 0$ . Consideriamo il diagramma di Nyquist di  $G(s)$ . Il cerchio ottimo che soddisfa il criterio è:

$$D(\alpha, \beta) = \mathcal{C} = \{C(-3.2, 0), R = 0.168\}$$

Pertanto il sistema è assolutamente stabile nel settore  $(0.2969, 0.3298)$ .



**6.5 Criterio di Popov**

Consideriamo il sistema (6.1), dove  $A \in \mathcal{H}$  e  $\Psi(\cdot)$  è una nonlinearietà tempo-invariante e tale che:

$$\Psi'(y)[\Psi(y) - Ky] \leq 0, \quad \forall y \in \Gamma \subset \mathcal{R}^p, K > 0. \tag{6.17}$$

Supponiamo che  $K\Psi(y)$  sia il gradiente di una funzione scalare e tale che:

$$\int_0^y \psi'(\sigma)Kd\sigma \geq 0, \quad \forall y \in \Gamma \subset \mathcal{R}^p. \tag{6.18}$$

Consideriamo il caso in cui  $\Psi(y)$  sia disaccoppiata ( $\Psi(y) = [\Psi_1(y), \Psi_2(y), \dots, \Psi_p(y)]$ ) e tale che:

$$0 \leq y_i \Psi(y_i) \leq \beta_i y_i^2, \quad \forall y_i : a_i \leq y_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, p$$

cioè:

$$K = \text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p\} \quad e \quad \Gamma = \{y \in \mathcal{R}^p : a_i \leq y_i \leq b_i\}.$$

Consideriamo la seguente funzione di Lyapunov candidata:

$$V(x) = x'Px + 2\eta \int_0^y \Psi'(\sigma)Kd\sigma, \quad \eta \geq 0. \quad (6.19)$$

Calcoliamo  $\dot{V}(x)$ :

$$\dot{V}(x) = x'(PA + A'P)x - 2x'PB\Psi(y) + 2\eta\Psi'(y)KC[Ax - B\Psi(y)] \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq \dots - 2\Psi(y)[\Psi(y) - Ky] = \\ &= x'(PA + A'P)x - 2x'PB\Psi(y) + 2\eta\Psi'(y)KCAx - \\ &\quad - 2\eta\Psi'(y)KCB\Psi(y) - 2\Psi'(y)\Psi(y) + 2\Psi'(y)KCx = \\ &= x'(PA + A'P)x - 2x'[PB - \eta A'C'K - C'K]\Psi(y) - \\ &\quad - \Psi'(y)[2I + \eta KCB + \eta B'C'K]\Psi(y). \end{aligned}$$

Scegliamo  $\eta$  tale che:

$$2I + \eta KCB + \eta B'C'K \geq 0,$$

e poniamo:

$$2I + \eta KCB + \eta B'C'K = W'W.$$

Supponiamo che  $\exists P = P' > 0$ ,  $L$  e  $\varepsilon > 0$  tali che:

$$\begin{cases} PA + A'P &= -L'L - \varepsilon P \\ PB &= C'K + \eta A'C'K - L'W. \end{cases} \quad (6.21)$$

Allora:

$$\dot{V}(x) \leq -\varepsilon x'Px - [Lx - W\Psi(y)]'[Lx - W\Psi(y)] \leq -\varepsilon x'Px,$$

che è definita negativa.

L'esistenza di  $P$ ,  $L$ , ed  $\varepsilon$  può essere risolta tramite il Lemma KYP. Si arriva così a dire che  $P$ ,  $L$ , ed  $\varepsilon$  tali per cui le (6.21) sono soddisfatte, esistono se e solo se la seguente funzione di trasferimento è SPR:

$$Z(s) = I + (1 + \eta s)KG(s). \quad (6.22)$$

Dunque, si può così enunciare il criterio di Popov per sistemi MIMO.

**Teorema 22 - (Criterio di Popov.)** *Si consideri il sistema (6.1) dove  $A$  è asintoticamente stabile,  $(A, B)$  è controllabile,  $(A, C)$  è osservabile e  $\Psi(\cdot)$  è una nonlinearity tempo-invariante per cui vale la condizione di settore:*

$$\Psi'(y)[\Psi(y) - Ky] \leq 0, \quad \forall y \in \Gamma \subset \mathbb{R}^p$$

con  $K$  simmetrica e  $K > 0$ . Si supponga che  $K\Psi(y)$  sia il gradiente di una funzione scalare e  $\int_0^y \Psi'(\sigma)Kd\sigma \geq 0$  sia verificata globalmente. Allora il sistema è assolutamente stabile se:

$$\exists \eta \geq 0 (-\eta^{-1} \neq \text{autovalori di } A) : Z(s) = I + (I + \eta s)KG(s) \text{ è SPR.} \quad (6.23)$$

--

**Osservazione 28** - La (6.23) coincide con il Lemma 5 per  $\eta = 0$ . Dunque il criterio di Popov appare essere meno conservativo del Criterio del Cerchio.

**Caso  $p = 1$ : sistemi SISO**

Se si sceglie  $\eta$  tale che  $Z(\infty) > 0$ , allora  $Z(s)$  è SPR se e solo se:

$$\text{Re}[1 + (1 + j\eta\omega)kG(j\omega)] > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

ovvero:

$$\frac{1}{k} + \text{Re}[G(j\omega)] - \eta\omega \text{Im}[G(j\omega)] > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (6.24)$$

Si può dare un'interpretazione grafica della (6.24) applicando le sostituzioni  $X(\omega) = \text{Re}[G(j\omega)]$  e  $Y(\omega) = \omega \text{Im}[G(j\omega)]$ , per cui la (6.24) assume la forma:

$$\frac{1}{k} + X(\omega) - \eta Y(\omega) > 0 \quad \Rightarrow \quad Y(\omega) < \frac{1}{\eta} X(\omega) + \frac{1}{k\eta}$$

