

## Capitolo 3

# Sintesi di un controllore $\mathcal{H}_\infty$

### 3.1 Specifiche per un sistema multivariabile

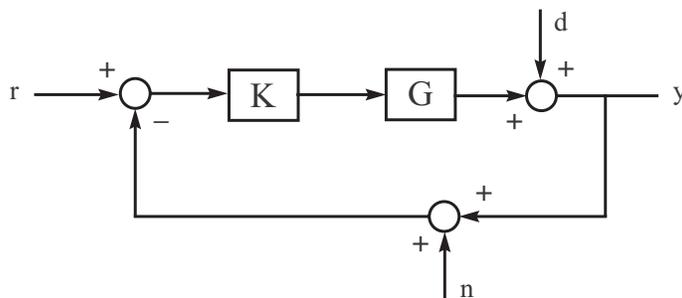


Figura 3.1: Anello di controllo con tre ingressi esogeni.

Se  $\mathbf{K}$  è il controllore e  $\mathbf{G}$  il sistema multivariabile da controllare, possiamo definire sulla base di figura 3.1 le seguenti grandezze:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K})^{-1} \quad \text{Funzione di Sensitività } (\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{y})$$

$$\mathbf{T} = (\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{G}\mathbf{K} \quad \text{Funzione di Sensitività Complementare } (\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{y})$$

dove  $\mathbf{I}$  è la matrice identità.  $\mathbf{r}$  è il segnale riferimento,  $\mathbf{d}$  un disturbo sull'uscita  $\mathbf{y}$  ed  $\mathbf{n}$  è il cosiddetto *sensor noise*.

La tabella 3.1 riporta le specifiche ad *anello chiuso* che possono essere definite sulla base dei parametri  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{T}$  introdotti sopra. Come nel Capitolo 2,  $\bar{\sigma}(\mathbf{M})$  e  $\underline{\sigma}(\mathbf{M})$  indicano il massimo ed il minimo valore singolare della matrice  $\mathbf{M}$  ed  $\varepsilon > 0$  è una grandezza piccola a piacere. Poichè in Fig. 3.1 la retroazione è unitaria,  $\sigma(\mathbf{S}), \sigma(\mathbf{T}) \in [0, 1]$ .

Se la condizione (I) è soddisfatta si ha una buona attenuazione del disturbo  $\mathbf{d}$  sull'uscita. Se la condizione (II) è soddisfatta il *sensor noise*  $\mathbf{n}$  si ripercuote in modo ridotto sull'uscita. Se la condizione (III) è soddisfatta è garantito un buon inseguimento del riferimento  $\mathbf{r}$ .

Infine se vale la condizione (IV) si ha una ridotta sollecitazione del comando. Nota che le condizioni (I)-(II) e (II)-(III) sono in conflitto.

I	$\bar{\sigma}(\mathbf{S}) < \varepsilon$
II	$\bar{\sigma}(\mathbf{T}) < \varepsilon$
III	$\bar{\sigma}(\mathbf{T}) \simeq \underline{\sigma}(\mathbf{T}) \simeq 1$
IV	$\bar{\sigma}(\mathbf{K}) < \varepsilon$

Tabella 3.1: *Le specifiche ad anello chiuso.*

Le specifiche ad anello chiuso di tabella 3.1 possono essere tradotte, tramite delle approssimazioni, in specifiche ad *anello aperto* meglio trattabili per la sintesi del controllore  $\mathbf{K}$  (tabella 3.2). Nota che nel caso di sistemi SISO si procede esattamente alla stessa maniera: infatti, data una specifica ad anello chiuso, ad esempio il picco di risonanza  $M_r$ , si ricava in maniera approssimata la corrispondente specifica ad anello aperto, il margine di fase  $\phi_m$  (dato  $M_r$ ,  $\phi_m = \frac{100 |\ln \hat{s}|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \hat{s}}}$ , con  $\hat{s} \simeq [0.85 \div 1] M_r - 1$ ).

I + III	$\underline{\sigma}(\mathbf{GK}) \gg 1$
II	$\bar{\sigma}(\mathbf{GK}) < \varepsilon$
IV	$\bar{\sigma}(\mathbf{K}) < \varepsilon$

Tabella 3.2: *Le corrispondenti specifiche ad anello aperto.*

## 3.2 Problema $\mathcal{H}_\infty$

Definendo delle opportune funzioni di peso  $\mathbf{W}_1$ ,  $\mathbf{W}_2$ ,  $\mathbf{W}_3$  (filtri passa-basso, passa-alto) su  $\mathbf{S}$ , sul comando e su  $\mathbf{T}$ , è possibile tradurre le specifiche ad anello aperto in tabella 3.2 in specifiche in norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

In particolare, il problema della determinazione di un controllore stabilizzante  $\mathbf{K}$  che soddisfi opportune specifiche di prestazione può essere tradotto nel seguente problema di ottimizzazione vincolata (*problema  $\mathcal{H}_\infty$  misto*),

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{K}} \left\| \begin{array}{l} \mathbf{W}_1 \mathbf{S} \\ \mathbf{W}_2 \mathbf{S} \mathbf{K} \\ \mathbf{W}_3 \mathbf{T} \end{array} \right\|_{\infty} \\ \text{s.t. } \mathbf{K} \in \mathcal{C}_s = \left\{ \mathbf{K} : \mathbf{K} = (\mathbf{X} + \mathbf{M} \mathbf{Q}) (\mathbf{Y} - \mathbf{N} \mathbf{Q})^{-1}, \mathbf{Q} \in \mathcal{R} \right\}, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

dove  $\mathcal{C}_s$  è la famiglia dei controllori che stabilizzano internamente l'impianto  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{Q}$  è il

parametro di Youla,  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{M}$  sono una rappresentazione coprime dell'impianto  $\mathbf{G}$  ed  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  sono tali che,

$$\mathbf{N} \mathbf{X} + \mathbf{M} \mathbf{Y} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{R}$$

dove  $\mathcal{R}$  è l'insieme delle matrici le cui componenti sono funzioni razionali proprie stabili.

### 3.3 Sintesi del controllore $\mathcal{H}_\infty$

Il problema  $\mathcal{H}_\infty$  presentato nella sezione precedente può essere risolto utilizzando il comando `hinf` del Robust Control Toolbox di Matlab. Tale comando ci consente così di determinare il controllore  $\mathcal{H}_\infty$  per il nostro sistema  $\mathbf{G}$ .

Per l'utilizzo di `hinf` è necessario che  $\mathbf{G}$  non presenti poli e/o zeri sull'asse immaginario. Come spiegato alla fine del Capitolo 1 il sistema  $\mathbf{G}$  ha un polo nell'origine. Per risolvere questo problema è sufficiente applicare la seguente trasformazione (bilineare) a  $\mathbf{G}(s)$ :

$$s = \hat{s} - p$$

dove  $p > 0$  (nel nostro caso si è scelto  $p = 0.01$ , tuttavia anche con  $p$  minori si hanno risultati corretti). Questa operazione equivale ad un shift dell'asse immaginario di una quantità pari a  $p$ . Poichè il comando `hinf` lavora con le matrici del sistema scritto in spazio di stato è opportuno compiere l'operazione di shift direttamente sulla matrice dinamica  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A}_S = \mathbf{A} - p\mathbf{I}.$$

I pesi  $\mathbf{W}_1$ ,  $\mathbf{W}_2$  e  $\mathbf{W}_3$  nella (3.1) sono stati scelti nel modo seguente:

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \frac{0.1s+10}{10s^2+2s+0.1} & 0 \\ 0 & \frac{0.1s+10}{10s^2+2s+0.1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} \frac{s^2}{1000} & 0 \\ 0 & \frac{s^2(10s+1)}{1000} \end{bmatrix}$$

dove  $\mathbf{W}_1^{-1}$  è un filtro passa-alto e  $\mathbf{W}_3^{-1}$  è un filtro passa-basso<sup>1</sup>. La figura 3.2 riporta i diagrammi di Bode del modulo di  $W_1(1,1)$ ,  $W_3(1,1)$  e  $W_3(2,2)$ .

Passando alla funzione `hinf` il sistema in spazio di stato shiftato ed i pesi  $\mathbf{W}_1$ ,  $\mathbf{W}_2$  e  $\mathbf{W}_3$  (per questo si utilizzano i comandi `mksys` e `augtf`), essa ci restituisce, tramite il comando `branch`, la descrizione in spazio di stato del controllore  $\mathcal{H}_\infty$ . Prima di scrivere il controllore come funzione di trasferimento ed applicarlo all'impianto  $\mathbf{G}$ , è necessario effettuare uno shift inverso sulla matrice dinamica  $\mathbf{A}^c$  del controllore,

$$\mathbf{A}_S^c = \mathbf{A}^c + p\mathbf{I}.$$

---

<sup>1</sup>Un altro insieme ammissibile di pesi, simile al precedente, è dato da:

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \frac{0.1s+10}{10s^2+100s+1} & 0 \\ 0 & \frac{0.1s+10}{10s^2+100s+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} \frac{s^2}{1000} & 0 \\ 0 & \frac{s^2(10s+1)}{1000} \end{bmatrix}$$

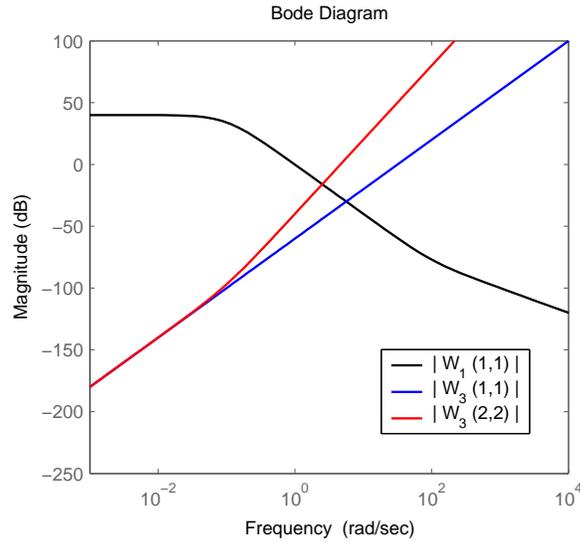


Figura 3.2: Diagrammi di Bode del modulo di  $W_1(1,1)$  (nero),  $W_3(1,1)$  (azzurro) e  $W_3(2,2)$  (rosso).

Il controllore  $\mathcal{H}_\infty$  trovato ha la seguente struttura,

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix}.$$

Tramite il comando `ss(H, 'min')` possiamo ottenere una realizzazione minima del controllore (di ordine 13) che sarà utilizzata nel seguito. La figura 3.3 riporta le uscite del sistema applicando il controllore  $\mathcal{H}_\infty$  al modello non lineare semplificato descritto nel Capitolo 1, utilizzando un riferimento di  $80^\circ$  sull'elevation e di  $0^\circ$  sull'azimuth (la condizione iniziale è  $\psi(0) = 45^\circ$ ,  $\varphi(0) = 0^\circ$ ). Nei primi 45 sec. di simulazione un controllore PID provvede a portare l'elicottero nel punto di lavoro.

Di seguito è riportato il listato Matlab che consente di sintetizzare il controllore  $\mathcal{H}_\infty$ , noto il sistema  $\mathbf{G}$  ed i pesi  $\mathbf{W}_1$ ,  $\mathbf{W}_2$  e  $\mathbf{W}_3$ .

```
G=[G11 G12;G21 G22]; % modello elicottero come matrice di f.d.t.
p=0.01; % parametro per lo shift dell'asse immaginario
Sys=ss(G); % rappresentazione in variabili di stato di G
Sys.a=Sys.a-p*eye(size(Sys.a)); % shift del polo nell'origine
W1=[0 0.1 10;10 2 0.1;0 0.1 10;10 2 0.1]; % peso su S
W2=[1;1;1;1]; % peso su SK
W3=[0 1 0 0;0 0 0 1000; 10 1 0 0; 0 0 0 1000]; % peso su T
SS_g=mksys(Sys.a, Sys.b, Sys.c, Sys.d); % matrici inserite in una 'tree variable'
Tss=augtf(SS_g, W1, W2, W3); % realizzazione in spazio di stato aumentata
```

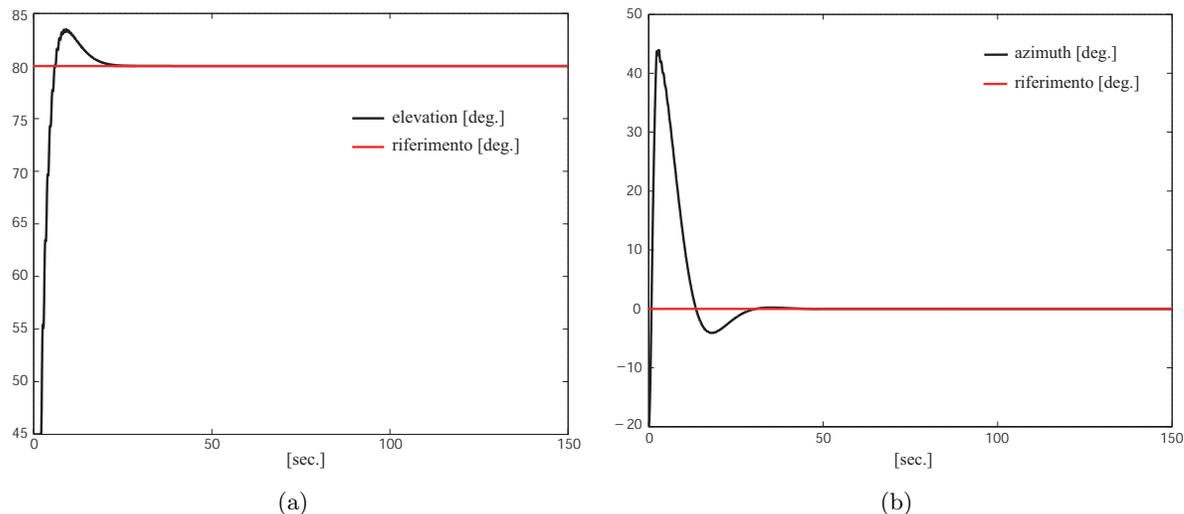


Figura 3.3: (a) Angolo di elevation, riferimento a  $80^\circ$ ; (b) Angolo di azimuth, riferimento a  $0^\circ$ . Nei primi 45 sec. un controllore PID porta l'elicottero nel punto di lavoro.

```
[SS_CP,SS_Cf,hinfo]=hinf(Tss); % calcolo del controllore H infinito SS_CP
[acp bcp ccp dcp]=branch(SS_CP); % controllore H infinito in variabili di stato
acp=acp+p*eye(size(acp)); % shift inverso
SScontr=ss(acp,bcp,ccp,dcp); % controllore H infinito dopo lo shift
H=tf(SScontr); % controllore H infinito come f.d.t.
aus=ss(H,'min'); % realizzazione minima del controllore H infinito
H_min=tf(aus); % controllore H infinito come f.d.t. (min realizzazione)
```

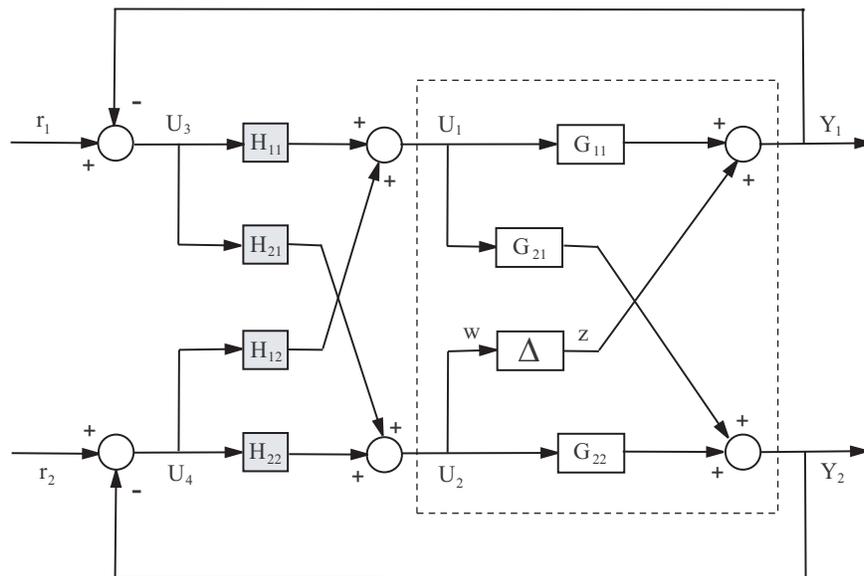
### 3.4 Stabilità robusta con il controllore $\mathcal{H}_\infty$

Supponiamo di avere un blocco di incertezza  $\Delta$  nella posizione (1, 2) in  $\mathbf{G}$ . Per studiare la stabilità robusta e calcolare il margine di stabilità con il controllore  $\mathcal{H}_\infty$  ci riconduciamo ancora allo schema  $\mathbf{M} - \Delta$  di figura 2.5.

Per ricavare la matrice  $\mathbf{M}$  consideriamo lo schema a blocchi riportato in figura 3.4, in cui supponiamo scollegato il blocco relativo all'incertezza  $\Delta$ .  $\mathbf{M}$  ha la stessa struttura vista nel caso con controllo proporzionale, ma in questo caso,

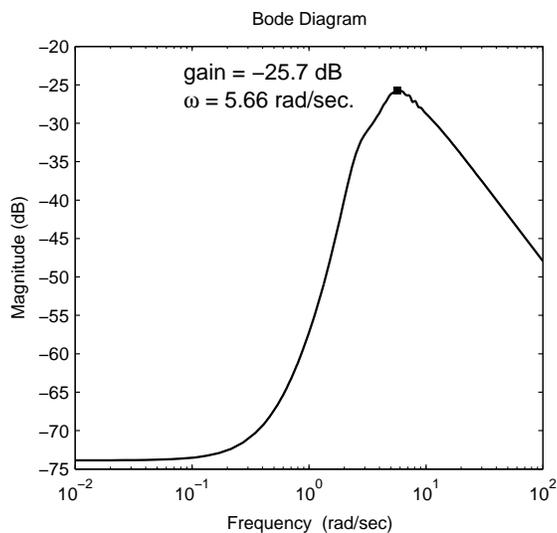
$$M_{33} = \frac{-H_{21}(1 + H_{12}G_{21}) + H_{11}H_{22}G_{21}}{(1 + H_{11}G_{11})(1 + H_{22}G_{22}) + H_{12}(G_{21} - H_{21}G_{11}G_{22})}. \quad (3.2)$$

Dalla figura 3.5 si ricava che  $\|M_{33}\|_\infty = -25.7 \text{ dB} = 0.0519$  e dunque il margine di stabilità è,


 Figura 3.4: Il controllore  $\mathcal{H}_\infty$  ed il sistema  $\mathbf{G}$  con un blocco di incertezza  $\Delta$ .

$$m_s = \|M_{33}\|_\infty^{-1} = 19.2678.$$

Perciò per incertezze  $\Delta$ , con  $\|\Delta\|_\infty < 19.2678$  il controllore  $\mathcal{H}_\infty$  continua ancora a stabilizzare il sistema ad anello chiuso. Nota che ponendo  $H_{21} = H_{12} = 0$  e  $H_{11} = H_{22} = 1/1000$  in (3.2), ritroviamo la funzione  $M_{33}$  studiata nel caso con controllore proporzionale.


 Figura 3.5: Diagramma di Bode del modulo di  $M_{33}(j\omega)$ .

### 3.5 Prestazione nominale del controllore $\mathcal{H}_\infty$

Il controllore  $\mathcal{H}_\infty$  ha prestazione nominale se,

$$\|\mathcal{M}\|_\infty = \left\| \begin{array}{cc} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{array} \right\|_\infty < 1$$

dove,

$$\begin{aligned} M_{11} &= \frac{H_{11}G_{11}(1 + H_{22}G_{22}) - H_{12}H_{21}G_{11}G_{22}}{(1 + H_{11}G_{11})(1 + H_{22}G_{22}) + H_{12}(G_{21} - H_{21}G_{11}G_{22})} \\ M_{12} &= \frac{H_{12}G_{11}}{(1 + H_{11}G_{11})(1 + H_{22}G_{22}) + H_{12}(G_{21} - H_{21}G_{11}G_{22})} \\ M_{21} &= \frac{H_{11}G_{21} + H_{21}G_{22}}{(1 + H_{11}G_{11})(1 + H_{22}G_{22}) + H_{12}(G_{21} - H_{21}G_{11}G_{22})} \\ M_{22} &= \frac{H_{22}G_{22}(1 + H_{11}G_{11}) + H_{12}(G_{21} - H_{21}G_{11}G_{22})}{(1 + H_{11}G_{11})(1 + H_{22}G_{22}) + H_{12}(G_{21} - H_{21}G_{11}G_{22})} \end{aligned} \quad (3.3)$$

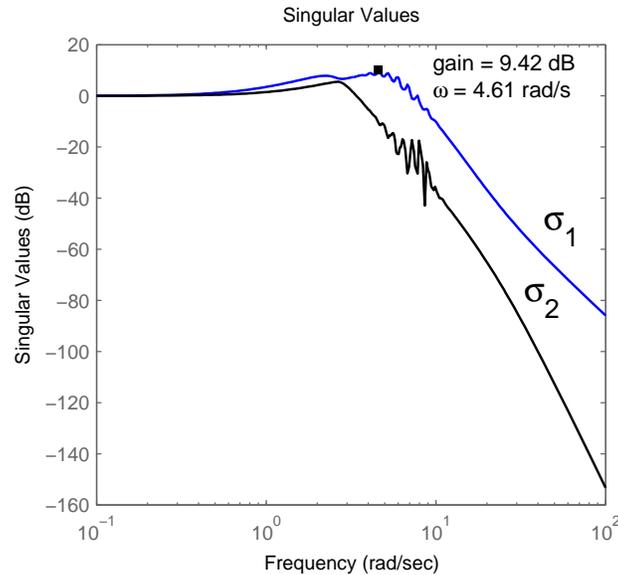


Figura 3.6: I valori singolari di  $\mathcal{M}$  per  $\omega \in [10^{-1}, 10^2]$  rad/sec.

Dalla figura 3.6 si ricava che  $\|\mathcal{M}\|_\infty = 9.42 \text{ dB} = 2.958$ . Dunque anche il controllore  $\mathcal{H}_\infty$  non ha prestazione nominale.

Noti i pesi  $\mathbf{W}_1$ ,  $\mathbf{W}_2$  e  $\mathbf{W}_3$ , la condizione per la prestazione nominale del controllore  $\mathcal{H}_\infty$  può essere riscritta nel seguente modo (vedi Fig. 3.7),

$$\|\mathcal{M}\|_\infty = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{W}_1 \mathbf{S} \\ \mathbf{W}_2 \mathbf{S} \mathbf{H} \\ \mathbf{W}_3 \mathbf{T} \end{array} \right\|_\infty = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{W}_1 (\mathbf{I} + \mathbf{G} \mathbf{H})^{-1} \\ \mathbf{W}_2 (\mathbf{I} + \mathbf{G} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H} \\ \mathbf{W}_3 (\mathbf{I} + \mathbf{G} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{H} \end{array} \right\|_\infty < 1$$

dove  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{T}$  sono la sensitività e la sensitività complementare.

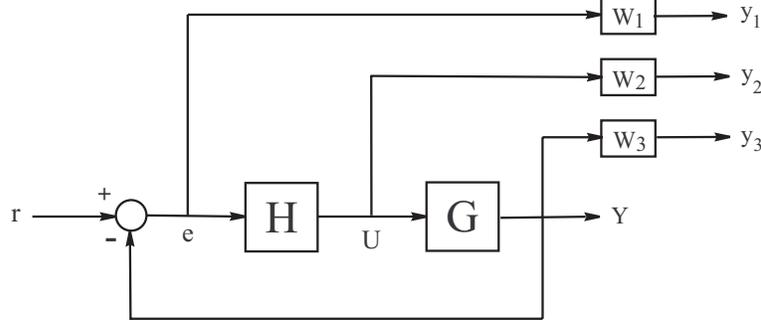


Figura 3.7: I pesi  $\mathbf{W}_1$ ,  $\mathbf{W}_2$  e  $\mathbf{W}_3$ , sull'errore  $\mathbf{e}$ , sul comando  $\mathbf{U}$  e sull'uscita  $\mathbf{Y}$ .

Tuttavia, il calcolo di

$$\left\| \begin{array}{c} \mathbf{W}_1 (\mathbf{I} + \mathbf{G} \mathbf{H})^{-1} \\ \mathbf{W}_2 (\mathbf{I} + \mathbf{G} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H} \\ \mathbf{W}_3 (\mathbf{I} + \mathbf{G} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{H} \end{array} \right\|_\infty$$

è più impegnativo del calcolo di

$$\left\| \begin{array}{cc} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{array} \right\|_\infty$$

in quanto è necessario determinare l'inversa della matrice simbolica  $\mathbf{I} + \mathbf{G} \mathbf{H}$ , le cui componenti sono funzioni razionali molto complesse.

### 3.6 Prestazione robusta del controllore $\mathcal{H}_\infty$

Per studiare le prestazioni robuste del controllore  $\mathcal{H}_\infty$  ci riconduciamo ancora allo schema  $\mathbf{M} - \Delta$  di Fig. 2.10. Le funzioni  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{21}$  e  $M_{22}$  sono riportate in (3.3), la funzione  $M_{33}$  in (3.2), mentre le componenti di  $\mathbf{M}$  mancanti,

$$M_{13} = \frac{1 + H_{22}G_{22} + H_{12}G_{21}}{(1 + H_{11}G_{11})(1 + H_{22}G_{22}) + H_{12}(G_{21} - H_{21}G_{11}G_{22})}$$

$$M_{23} = \frac{-H_{11}G_{21} - H_{21}G_{22}}{(1 + H_{11}G_{11})(1 + H_{22}G_{22}) + H_{12}(G_{21} - H_{21}G_{11}G_{22})}$$

$$M_{31} = \frac{H_{21}(1 + H_{12}G_{21}) - H_{11}H_{22}G_{21}}{(1 + H_{11}G_{11})(1 + H_{22}G_{22}) + H_{12}(G_{21} - H_{21}G_{11}G_{22})}$$

$$M_{32} = \frac{H_{22}(1 + H_{11}G_{11}) - H_{12}H_{21}G_{11}}{(1 + H_{11}G_{11})(1 + H_{22}G_{22}) + H_{12}(G_{21} - H_{21}G_{11}G_{22})}.$$

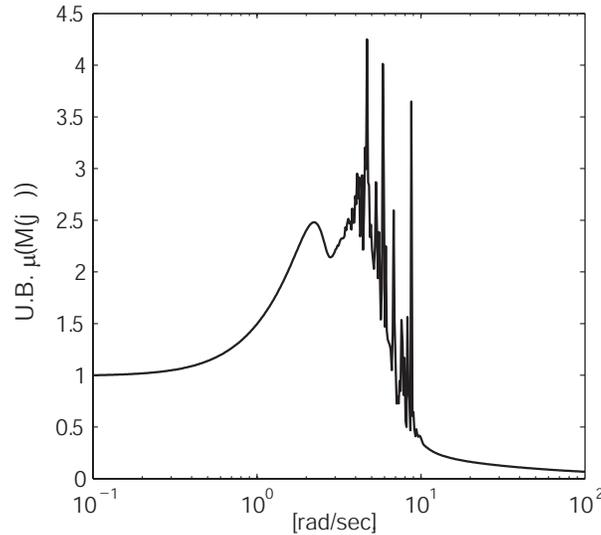


Figura 3.8: Un upper bound di  $\mu(\mathbf{M}(j\omega))$  per  $\omega \in [10^{-1}, 10^2]$  rad/sec.

La figura 3.8 riporta un upper bound di  $\mu(\mathbf{M}(j\omega))$  per  $\omega \in [10^{-1}, 10^2]$  rad/sec (500 punti). Come possiamo notare sono presenti forti oscillazioni fra 3 e 10 rad/sec. a causa di problemi numerici (basso numero di condizionamento) durante il calcolo dell'upper bound del valore singolare strutturato. Utilizzando la funzione `mu` (`mussv`) del Robust Control Toolbox al posto della funzione `ssv`, è lecito attendersi minori problemi numerici e la scomparsa delle oscillazioni. In assenza di oscillazioni, plausibilmente,

$$\sup_{\omega} \mu(\mathbf{M}(j\omega)) \approx 2.8.$$

La tabella 3.3 riporta il margine di stabilità e le prestazioni del controllore proporzionale  $\mathbf{K} = \text{diag}(1/1000, 1/1000)$  descritto nel Capitolo 2 e del controllore  $\mathcal{H}_\infty$ .

Come possiamo notare dalla tabella il controllore proporzionale possiede un margine di stabilità maggiore di quello del controllore  $\mathcal{H}_\infty$ . Questo risultato è in accordo con la teoria: infatti in generale, fissato un certo controllore  $\mathcal{H}_\infty$  che possiede un margine di stabilità  $\overline{m}_s$  è sempre possibile determinare un controllore proporzionale che presenti un margine di stabilità maggiore di  $\overline{m}_s$ .

	Controllore prop.	Controllore $\mathcal{H}_\infty$
<b>Margine di stabilità</b> ( $m_s$ )	6237.3	19.268
<b>Prestazione nominale</b> ( $\ \mathcal{M}\ _\infty$ )	1.656	2.958
<b>Prestazione robusta</b> (sup U.B. $\mu(\mathbf{M})$ )	1.649	$\approx 2.8$

Tabella 3.3: Margine di stabilità e prestazioni del controllore proporzionale  $\mathbf{K} = \text{diag}(1/1000, 1/1000)$  e del controllore  $\mathcal{H}_\infty$ .

Per le prestazioni nominali ci saremmo attesi valori minori per il controllore  $\mathcal{H}_\infty$  rispetto a quello proporzionale: i valori ottenuti sono comunque plausibili.

Anche per le prestazioni robuste ci saremmo attesi valori minori per il controllore  $\mathcal{H}_\infty$  rispetto a quello proporzionale. Tuttavia, come abbiamo visto, nel caso del controllore  $\mathcal{H}_\infty$  i risultati non sono molto attendibili a causa di errori numerici durante il calcolo dell'upper bound del valore singolare strutturato. L'utilizzo di routine di calcolo più efficienti dovrebbe portare a stime più attendibili dell'upper bound di  $\mu$ .

### 3.7 Esercizio 3: doppia incertezza

Come nell'Esercizio 1, supponiamo che un'incertezza additiva  $\Delta_1$  sia presente, oltre che su  $G_{12}$  anche su  $G_{11}$ :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} + \Delta_2 & \Delta_1 \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}.$$

Considerando il controllore  $\mathcal{H}_\infty$  determinato nella sezione 3.3, calcolare il margine di stabilità  $m_s$  e le prestazioni nominali e robuste.  $\diamond$

*Traccia della soluzione:* Lo schema  $\mathbf{M} - \Delta$  riportato in figura 2.12 è ancora valido per il problema in esame. La matrice  $\mathbf{M}$  può essere calcolata sfruttando lo schema a blocchi di Fig. 3.9 ed ha ancora la struttura descritta nell'Esercizio 1 (equazione (2.6)). Per lo studio della stabilità robusta siamo interessati alla matrice  $\begin{bmatrix} M_{33} & M_{34} \\ M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}$ , dove,

$$M_{33} = \frac{-H_{21}(1 + H_{12}G_{21}) + H_{11}H_{22}G_{21}}{(1 + H_{11}G_{11})(1 + H_{22}G_{22}) + H_{12}(G_{21} - H_{21}G_{11}G_{22})}$$

$$M_{34} = \frac{-H_{21}(1 + H_{12}G_{21}) + H_{11}H_{22}G_{21}}{(1 + H_{11}G_{11})(1 + H_{22}G_{22}) + H_{12}(G_{21} - H_{21}G_{11}G_{22})}$$

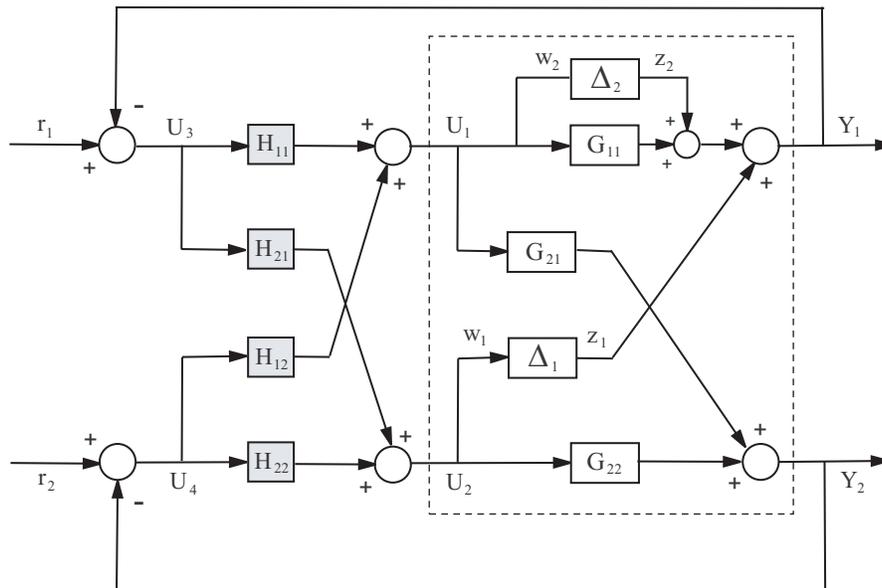


Figura 3.9: Il controllore  $\mathcal{H}_\infty$  ed il sistema  $\mathbf{G}$  in presenza di incertezza strutturata.

$$M_{43} = -\frac{-H_{11}(1 + H_{22}G_{22}) + H_{12}H_{21}G_{22}}{(1 + H_{11}G_{11})(1 + H_{22}G_{22}) + H_{12}(G_{21} - H_{21}G_{11}G_{22})}$$

$$M_{44} = -\frac{-H_{11}(1 + H_{22}G_{22}) + H_{12}H_{21}G_{22}}{(1 + H_{11}G_{11})(1 + H_{22}G_{22}) + H_{12}(G_{21} - H_{21}G_{11}G_{22})}.$$

Per il calcolo delle prestazioni nominali e robuste valgono le stesse considerazioni fatte nella traccia della soluzione dell'Esercizio 1.

### 3.8 Esercizio 4

Ripetere l'Esercizio 2 utilizzando il controllore  $\mathcal{H}_\infty$  al posto del controllore proporzionale.

### 3.9 Esercizio 5: controllo $\mathcal{H}_\infty$ sul sistema reale

Ricalibrare i pesi  $\mathbf{W}_1$ ,  $\mathbf{W}_2$  e  $\mathbf{W}_3$  trovati nella sezione 3.3 in modo tale che il controllore  $\mathcal{H}_\infty$  garantisca sul sistema reale (a cui si può accedere via rete tramite il telelaboratorio) le seguenti prestazioni:

- Errore di inseguimento ad un riferimento costante a  $70^\circ$  sull'elevation e  $0^\circ$  sull'azimuth, minore di  $5^\circ$  a regime.

- Minimo errore di inseguimento a regime di una onda quadra centrata in  $80^\circ$ , di periodo 50 sec. e ampiezza  $10^\circ$ , sull'elevation. Porre un riferimento costante a  $0^\circ$  sull'azimuth.
- Minimo errore di inseguimento a regime di una onda sinusoidale centrata in  $80^\circ$ , di periodo 20 sec. e ampiezza  $10^\circ$ , sull'elevation. Porre un riferimento costante a  $0^\circ$  sull'azimuth.

Come nella simulazione di Fig. 3.3, utilizzare nei primi 45 sec. il controllore PID del telelaboratorio, in modo da portare l'elicottero dalla posizione di partenza a  $45^\circ$  di elevation al punto di lavoro a  $80^\circ$ .

Progettare anche un controllore  $\mathcal{H}_\infty$  che non necessiti del controllore PID nei primi 45 sec. di simulazione.

# Bibliografia

- [1] Humusoft – *CE 150 Helicopter Simulator User's guide* – © 1992-1996.
- [2] J. Doyle – *Analysis of feedback systems with structured uncertainties*  
– in Proceedings of IEEE, vol. 129, no. 6, pp. 242-250, Nov. 1982.
- [3] J. Doyle, J. E. Wall and G. Stein – *Performance and robustness analysis for structured uncertainty* – in Proc. IEEE Conference on Decision and Control, pp. 629-636, 1982.
- [4] A. Isidori – *Nonlinear Control Systems* – 3rd Edition, Springer, 1995.
- [5] Mathworks, Inc. – *Robust Control Toolbox v.2.0 User's Guide* – © 1992 - 2001.