

Capitolo 2

Analisi della stabilità

2.1 Luoghi caratteristici

Nel caso di sistemi SISO lo studio del diagramma di Nyquist ci fornisce informazioni sulla stabilità del sistema ad anello chiuso.

Per sistemi MIMO una informazione equivalente ci è fornita dai *Luoghi Caratteristici*, che sono ottenuti tracciando la parte reale ed immaginaria degli autovalori della matrice $\mathbf{G}(j\omega)$ per ω fra $-\infty$ e $+\infty$,

$$\lambda_i(\mathbf{G}(j\omega)), \quad \omega \in (-\infty, +\infty), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Poichè $\mathbf{G}(j\omega)|_{\omega=+\infty} = \mathbf{G}(j\omega)|_{\omega=-\infty}$, i luoghi caratteristici formano complessivamente un diagramma chiuso nel piano complesso. La stabilità del sistema può essere così studiata sulla base delle rotazioni dei luoghi caratteristici intorno al punto $(-1, 0)$.

Poniamo il sistema $\mathbf{G}(s)$ in anello chiuso e supponiamo che la retroazione sia unitaria, cioè $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (vedi Fig. 2.1).

Poichè la matrice \mathbf{G} in (1.8) è triangolare inferiore, gli autovalori di $\mathbf{G}(j\omega)$ hanno la seguente forma,

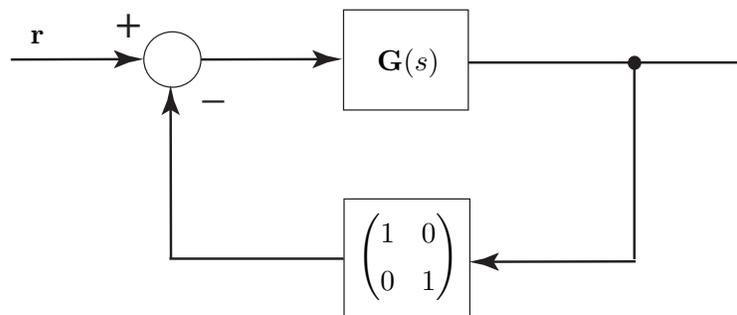


Figura 2.1: Il sistema $\mathbf{G}(s)$ in anello chiuso con retroazione unitaria.

$$\lambda_1(j\omega) = \frac{1493}{0.00657\omega^4 - 0.1389j\omega^3 - 0.8174\omega^2 + 0.9518j\omega + 1} \quad (2.1)$$

$$\lambda_2(j\omega) = \frac{-194j}{\omega(-0.0298j\omega^3 - 0.3\omega^2 + 0.976j\omega + 1)}$$

Variando la pulsazione ω su un range abbastanza ampio di valori (ad es. 1000 punti fra 10^{-3} e 10^3 rad/s), otteniamo il diagramma di figura 2.2.

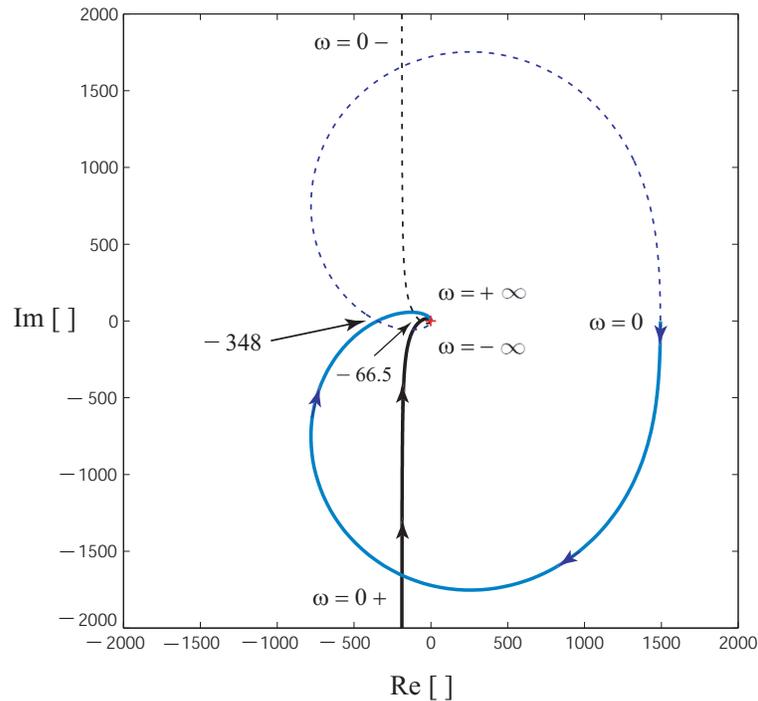


Figura 2.2: I luoghi caratteristici: $\lambda_1(j\omega)$ (blu) e $\lambda_2(j\omega)$ (nero), $\omega \in (10^{-3}, 10^3)$ rad/sec.

Come si può notare dalla figura 2.2, $\lambda_2(j\omega)$ per $\omega \in (10^{-3}, 10^3)$ rad/sec. presenta una richiusura all'infinito in quanto $\lambda_2(s)$ ha un polo nell'origine. I luoghi caratteristici circondano il punto critico $(-1, 0)$ (crocetta rossa in Fig. 2.2) in senso orario. Alla fine del Capitolo 1 abbiamo visto che il sistema $\mathbf{G}(s)$ è stabile. Perciò a causa delle due rotazioni in senso orario dei luoghi caratteristici il sistema ad anello chiuso con $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è instabile. Dalla Fig. 2.2 si osserva che $\lambda_1(j\omega)$ interseca l'asse reale in -348 mentre $\lambda_2(j\omega)$ in -66.5 . Abbiamo dunque che $\mathbf{K} = \text{diag}(1/348, 1/66.5)$ è il valore limite per garantire la stabilità ad anello chiuso.

2.2 Bande di Gershgorin

Poichè il calcolo simbolico degli autovalori di una matrice di funzioni di trasferimento risulta molto gravoso al crescere delle dimensioni del sistema, per studiare la stabilità di

un sistema ad anello chiuso si ricorre spesso all'analisi delle cosiddette *Bande di Gershgorin*. Questo metodo fornisce condizioni *solo* sufficienti per lo studio della stabilità del sistema.

Teorema 1 (Gershgorin). *Data una matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, gli autovalori di \mathbf{M} stanno nell'unione dei cerchi \mathcal{K}_i di centro c_i e raggio r_i , $i = 1, 2, \dots, n$, dove,*

$$c_i = M_{ii}, \quad r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |M_{ij}|.$$

Lo stesso risultato vale considerando le colonne di \mathbf{M} invece delle righe.

Data una matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, gli autovalori di \mathbf{M} stanno nell'unione dei cerchi \mathcal{H}_i di centro c_i e raggio r_i , $i = 1, 2, \dots, n$, dove,

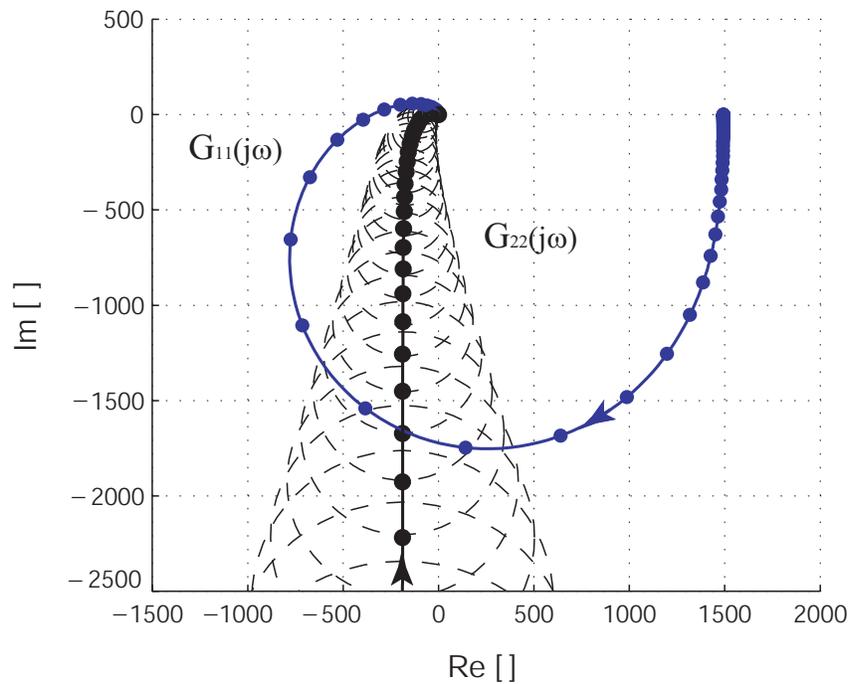
$$c_i = M_{ii}, \quad r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |M_{ji}|.$$

Quindi possiamo concludere che gli autovalori della matrice \mathbf{M} stanno nella regione \mathcal{A} ,

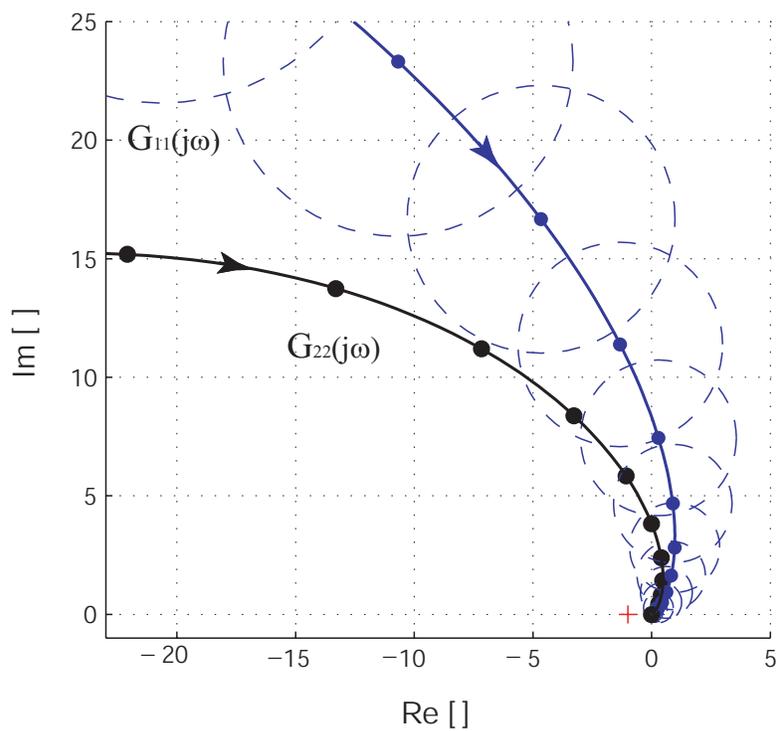
$$\mathcal{A} = \left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{K}_i \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{H}_i \right). \quad \diamond$$

Disegniamo i diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_{11}(j\omega)$ e $G_{22}(j\omega)$ del nostro sistema e sovrapponiamo ad essi ad ogni frequenza i cerchi di Gershgorin calcolati per riga (Fig. 2.3(a)) o per colonna (Fig. 2.3(b)). Se le regioni ottenute intersecando i cerchi calcolati per riga e colonna non includono il punto $(-1, 0)$ possiamo applicare il criterio di Nyquist e studiare la stabilità ad anello chiuso valutando il numero di rotazioni delle bande intorno al punto critico. Per la discussione della stabilità è necessario che $\mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{G}$ sia diagonale dominante (una matrice è detta diagonale dominante se per ogni pulsazione le sue bande di Gershgorin non invadono l'origine). Ovviamente se \mathbf{K} è diagonale, è sufficiente che \mathbf{G} sia diagonale dominante.

Dall'analisi delle bande di Gershgorin calcolate per riga (Fig. 2.3(a)) emerge che l'autovalore $\lambda_1(j\omega)$, ad differenza di $\lambda_2(j\omega)$, può essere localizzato ad ogni frequenza con incertezza nulla (infatti il raggio dei cerchi è zero). Viceversa dall'analisi delle bande di Gershgorin calcolate per colonna (Fig. 2.3(b)) risulta che questa volta è possibile localizzare $\lambda_2(j\omega)$ e non $\lambda_1(j\omega)$ con incertezza nulla (ovviamente i precedenti risultati dipendono dal fatto che la matrice \mathbf{G} è triangolare inferiore). Intersecando le bande di Gershgorin calcolate per riga e per colonna non abbiamo dunque alcuna incertezza sulla posizione di $\lambda_1(j\omega)$ e $\lambda_2(j\omega)$. In altre parole le bande di Gershgorin coincidono con i diagrammi di Nyquist di $G_{11}(j\omega)$ e $G_{22}(j\omega)$ e dunque con i luoghi caratteristici analizzati nella sezione 2.1. Le conclusioni che possiamo trarre circa la stabilità del sistema ad anello chiuso sono dunque le stesse discusse per i luoghi caratteristici.



(a)



(b)

Figura 2.3: (a) Cerchi di Gershgorin calcolati per riga; (b) Cerchi calcolati per colonna: è evidenziata la regione intorno a $(-1, 0)$. In entrambi i casi $\omega \in (10^{-3}, 10^3)$ rad/sec.

Osservazione 5. Poichè $G_{11}(s)$ e $G_{22}(s)$ sono strettamente proprie (cioè il numero degli zeri è strettamente minore del numero dei poli),

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |\lambda_i(\mathbf{G}(j\omega))| = 0, \quad i = 1, 2.$$

Inoltre poichè $G_{12}(s) = 0$ e $G_{21}(s)$ è strettamente propria, per $\omega \rightarrow +\infty$ il raggio dei cerchi di Gershgorin tende a 0 (vedi Fig. 2.3(a), 2.3(b)).

2.3 Progetto di un controllore stabilizzante

Riprendendo quanto detto alla fine della sezione 2.1, è evidente che un controllore proporzionale,

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \quad \text{con } k_1 \leq \frac{1}{348}, \quad k_2 \leq \frac{1}{66.5}, \quad (2.2)$$

consente di stabilizzare \mathbf{G} ad anello chiuso. Riprendiamo l'anello di controllo di Fig. 2.1, poniamo in catena diretta $\mathbf{K} = \text{diag}(1/400, 1/400)$, (per semplicità d'ora in avanti sceglieremo $k_1 = k_2$) e studiamo la risposta del sistema ad un gradino unitario in ingresso ($\mathbf{r} = (1, 1)^T$). Come possiamo notare osservando le uscite Y_1, Y_2 del sistema (Fig. 2.4(a)) il sistema in anello chiuso è stabile. Se scegliamo un guadagno minore, ad esempio $\mathbf{K} = \text{diag}(1/1000, 1/1000)$ e ci allontaniamo così maggiormente dai valori critici in (2.2), possiamo notare un miglioramento delle prestazioni con una riduzione dell'oscillazione delle uscite durante il transitorio (Fig. 2.4(b)). Occorre tuttavia osservare che nonostante entrambi i valori di \mathbf{K} garantiscano la stabilità, l'errore di inseguimento del riferimento a regime non è nullo.

2.4 Analisi della stabilità robusta

Per studiare la robustezza del controllore $\mathbf{K} = \text{diag}(k_1, k_2) = \text{diag}(1/1000, 1/1000)$ supponiamo che la componente (1, 2) della matrice \mathbf{G} non sia 0 ma una funzione razionale fratta stabile Δ ,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & \Delta \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}.$$

Nel seguito calcoleremo la massima $\|\Delta\|_\infty$ che mantiene il sistema in anello chiuso stabile. In altre parole determineremo il margine di stabilità m_s del sistema.

Per far questo è opportuno ricondursi allo schema $\mathbf{M} - \Delta$ riportato in figura 2.5. Per ricavare la matrice \mathbf{M} ,

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{cc|c} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ \hline M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{array} \right], \quad (2.3)$$

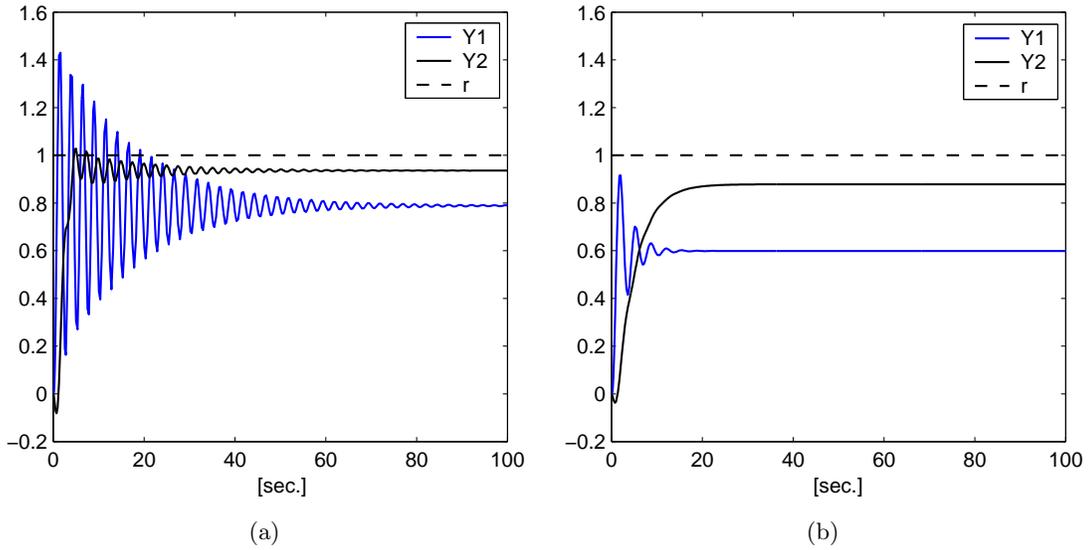


Figura 2.4: Le uscite Y_1 e Y_2 ed il riferimento r . (a) $k_1 = k_2 = 1/400$; (b) $k_1 = k_2 = 1/1000$.

consideriamo lo schema a blocchi riportato in figura 2.6, in cui supponiamo scollegato il blocco relativo all'incertezza Δ . La matrice \mathbf{M} è uguale a,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1}{r_1} & \frac{Y_1}{r_2} & \frac{Y_1}{z} \\ \frac{Y_2}{r_1} & \frac{Y_2}{r_2} & \frac{Y_2}{z} \\ \frac{w}{r_1} & \frac{w}{r_2} & \frac{w}{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_1 G_{11}}{1 + k_1 G_{11}} & 0 & \frac{1}{1 + k_1 G_{11}} \\ \frac{k_1 G_{21}}{(1 + k_1 G_{11})(1 + k_2 G_{22})} & \frac{k_2 G_{22}}{1 + k_2 G_{22}} & -\frac{k_1 G_{21}}{(1 + k_1 G_{11})(1 + k_2 G_{22})} \\ -\frac{k_1 k_2 G_{21}}{(1 + k_1 G_{11})(1 + k_2 G_{22})} & \frac{k_2}{1 + k_2 G_{22}} & \boxed{\frac{k_1 k_2 G_{21}}{(1 + k_1 G_{11})(1 + k_2 G_{22})}} \end{bmatrix}.$$

Per determinare il margine di stabilità m_s dobbiamo calcolare la norma \mathcal{H}_∞ della componente,

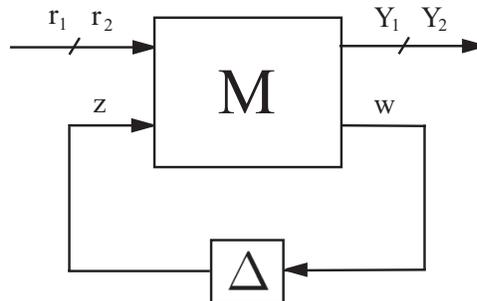
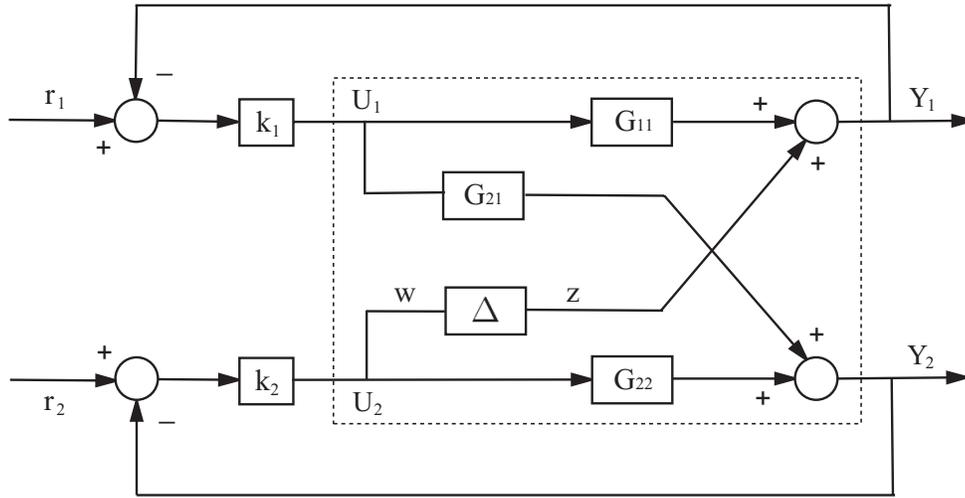


Figura 2.5: Schema $\mathbf{M} - \Delta$.


 Figura 2.6: Schema a blocchi per il calcolo di \mathbf{M} .

$$M_{33} = \frac{k_1 k_2 G_{21}}{(1 + k_1 G_{11})(1 + k_2 G_{22})}$$

con $k_1 = k_2 = 1/1000$. Essendo M_{33} scalare,

$$\|M_{33}\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(M_{33}(j\omega)) = \sup_\omega |M_{33}(j\omega)|$$

dove $\bar{\sigma}(\cdot)$ indica il massimo valore singolare di $M_{33}(j\omega)$. La figura 2.7 riporta il diagramma di Bode del modulo di $M_{33}(j\omega)$.

Il diagramma di Bode assume il valore massimo, $-75.9 \text{ dB} = 1.6032 \times 10^{-4}$, alla pulsazione $\omega = 1.82 \text{ rad/s}$. Il margine di stabilità del sistema è dunque,

$$m_s = \|M_{33}\|_\infty^{-1} = 6237.3. \quad (2.4)$$

Questo significa che fissato il controllore proporzionale $\mathbf{K} = \text{diag}(1/1000, 1/1000)$, (che stabilizza il modello nominale), per incertezze Δ tali che $\|\Delta\|_\infty < 6237.3$ il controllore continua ancora a stabilizzare il sistema.

Come viene riportato nella dimostrazione della condizione necessaria del teorema dello *Small Gain*, è sempre possibile trovare una perturbazione Δ , con $\|\Delta\|_\infty > m_s$, che renda il sistema instabile.

Cerchiamo una perturbazione Δ che abbia tale proprietà. Scegliamo per esempio la seguente semplice funzione razionale fratta stabile:

$$p(s) = \frac{40000}{s + 4}. \quad (2.5)$$

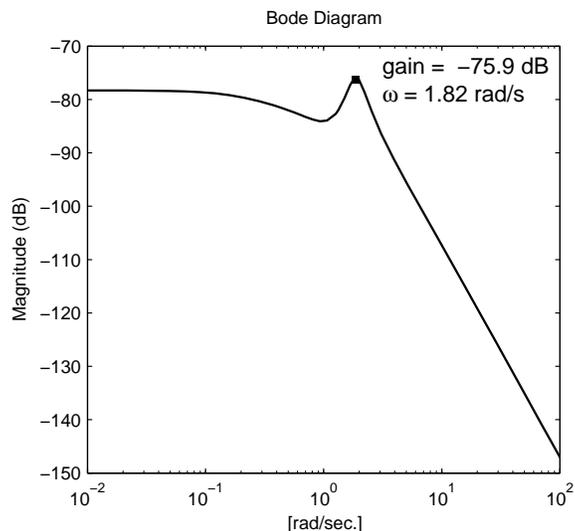


Figura 2.7: Il diagramma di Bode del modulo di $M_{33}(j\omega)$

Come è facile verificare $\|p(s)\|_{\infty} = 10000 > m_s$: tuttavia, se si analizzano le uscite Y_1 e Y_2 del sistema in cui è presente una perturbazione $\Delta = p(s)$, (con gradino unitario in ingresso) osserviamo che il sistema in anello chiuso è stabile (vedi Fig. 2.8(a)).

Applichiamo un ritardo di 90° a $p(s)$. Approssimando al secondo ordine con una funzione razionale¹ il ritardo $e^{-\frac{\pi}{2}s}$ (si utilizza per questo il comando `pade` di Matlab), si ottiene la

¹Questa approssimazione è necessaria in quanto Δ deve essere una funzione razionale.

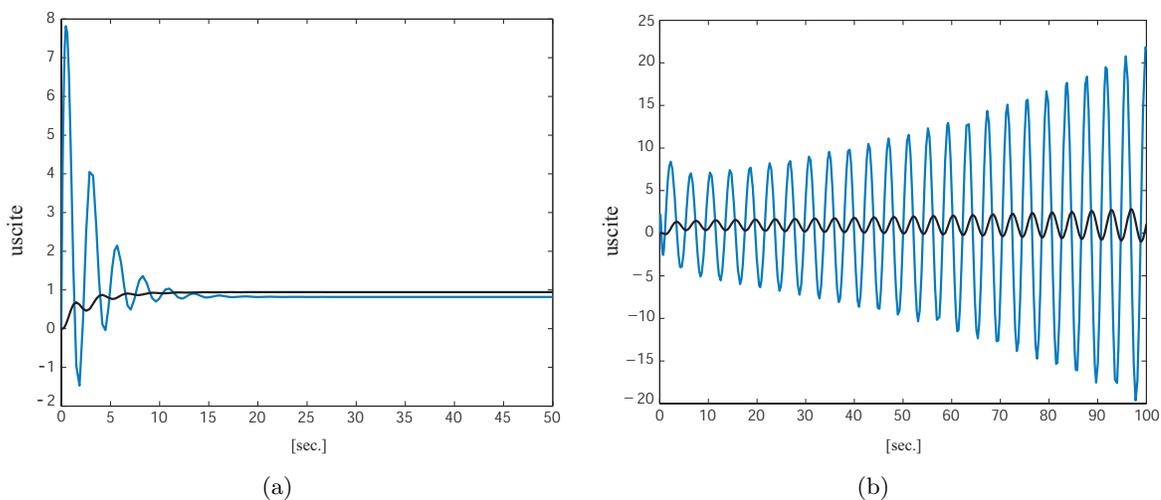


Figura 2.8: Uscite del sistema (Y_1 azzurra, Y_2 nera) utilizzando: (a) $\Delta = p(s)$; (b) $\Delta = p_r(s)$.

seguinte funzione ritardata (stabile),

$$p_r(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s} \cdot \frac{40000}{s+4} \simeq \frac{s^2 - 3.82s + 4.863}{s^2 + 3.82s + 4.863} \cdot \frac{40000}{s+4}.$$

Ponendo $\Delta = p_r(s)$ e analizzando le uscite Y_1 e Y_2 (Fig. 2.8(b)), notiamo che il sistema in questo caso è instabile.

2.5 Prestazione nominale del controllore proporzionale

Consideriamo ancora il controllore proporzionale $\mathbf{K} = \text{diag}(1/1000, 1/1000)$ studiato nella sezione precedente. Tale controllore ha prestazione nominale se,

$$\|\mathcal{M}\|_\infty = \left\| \begin{array}{cc} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{array} \right\|_\infty = \left\| \begin{array}{cc} \frac{k_1 G_{11}}{1 + k_1 G_{11}} & 0 \\ \frac{k_1 G_{21}}{(1 + k_1 G_{11})(1 + k_2 G_{22})} & \frac{k_2 G_{22}}{1 + k_2 G_{22}} \end{array} \right\|_\infty < 1$$

con $k_1 = k_2 = 1/1000$. Applicando il comando `sigma` del Robust Control Toolbox di Matlab [5] alla matrice \mathcal{M} si ottengono i guadagni principali di \mathcal{M} (vedi Fig. 2.9). E' facile ricavare che,

$$\|\mathcal{M}\|_\infty = 4.38 \text{ dB} = 1.6558.$$

Il controllore proporzionale $\mathbf{K} = \text{diag}(1/1000, 1/1000)$ non ha dunque prestazione nominale. Nota che invece il controllore $\mathbf{K} = \text{diag}(1/2000, 1/2000)$ ha prestazioni nominali.

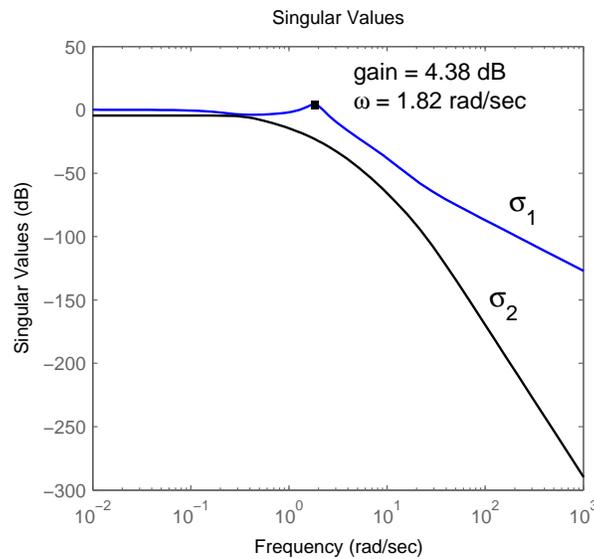


Figura 2.9: I valori singolari di \mathcal{M} per $\omega \in (10^{-2}, 10^3)$ rad/sec.

2.6 Prestazione robusta del controllore proporzionale

Consideriamo ancora il controllore proporzionale $\mathbf{K} = \text{diag}(1/1000, 1/1000)$. Aggiungiamo un blocco fittizio Δ_0 , che simula la funzione che determina le prestazioni del sistema, allo schema $\mathbf{M} - \Delta$ di figura 2.5 (l'incertezza è così descritta dalla struttura $BD_1 = \{(1, 1); (2, 1)\}_1$). Il problema della prestazione robusta può essere così riformulato come un problema di stabilità robusta o problema di μ *aumentato*.

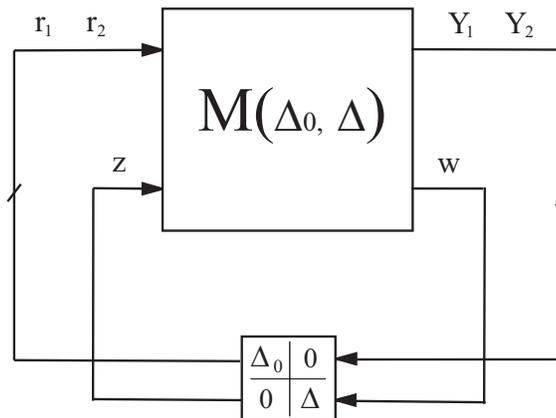


Figura 2.10: Aggiunta di un blocco fittizio Δ_0 allo schema $\mathbf{M} - \Delta$.

Il controllore \mathbf{K} ha prestazioni robuste se,

$$\bar{\mu}(\mathbf{M}(\Delta_0, \Delta)) = \sup_{\omega} \mu(\mathbf{M}(\Delta_0(j\omega), \Delta(j\omega))) < 1,$$

dove $\mathbf{M}(\Delta_0(j\omega), \Delta(j\omega)) = \mathbf{M}(j\omega)$. La figura 2.11 riporta un upper bound di $\mu(\mathbf{M}(j\omega))$ per $\omega \in [10^{-2}, 10^2]$ rad/sec (2000 punti), calcolato tramite la funzione `ssv` del Robust Control Toolbox di Matlab. Dalla figura 2.11 abbiamo che,

$$\sup_{\omega} \text{U.B. } \mu(\mathbf{M}(j\omega)) = 1.6487$$

e quindi il controllore $\mathbf{K} = \text{diag}(1/1000, 1/1000)$ non ha prestazione robusta (supposto che $\sup_{\omega} \text{U.B. } \mu(\mathbf{M}(j\omega))$ sia sufficientemente vicino a $\sup_{\omega} \mu(\mathbf{M}(j\omega))$).

2.7 Esercizio 1: doppia incertezza

Nel Capitolo 1 abbiamo osservato che la componente di \mathbf{G} più impegnativa da calcolare e sui cui parametri abbiamo maggiore incertezza nell'identificazione è G_{11} . Viceversa la determinazione di G_{21} e G_{22} si è dimostrata più semplice e diretta. Per questo motivo si può supporre che oltre all'incertezza Δ_1 su G_{12} , sia presente anche una incertezza additiva Δ_2 su G_{11} ,

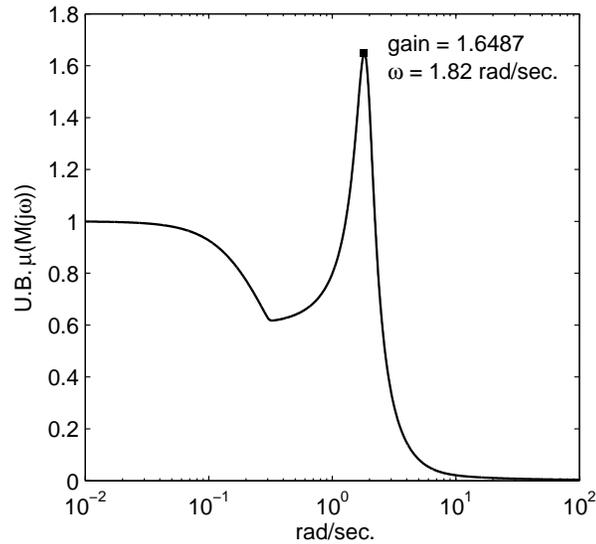


Figura 2.11: Un upper bound di $\mu(\mathbf{M}(j\omega))$ per $\omega \in (10^{-2}, 10^2)$ rad/sec.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} + \Delta_2 & \Delta_1 \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}.$$

Supponendo che $\mathbf{K} = \text{diag}(1/1000, 1/1000)$, determinare il margine di stabilità m_s e le prestazioni nominali e robuste del controllore. L'incertezza è in questo caso non strutturata o strutturata? \diamond

Traccia della soluzione: La figura 2.12 riporta lo schema $\mathbf{M} - \Delta$ che si ottiene considerando le incertezze Δ_1 e Δ_2 . L'incertezza è in questo caso strutturata [2, 3]. La matrice \mathbf{M} , utile per il calcolo del margine di stabilità e le prestazioni del controllore, può essere determinata utilizzando lo schema di Fig. 2.13. La matrice \mathbf{M} ha la seguente struttura,

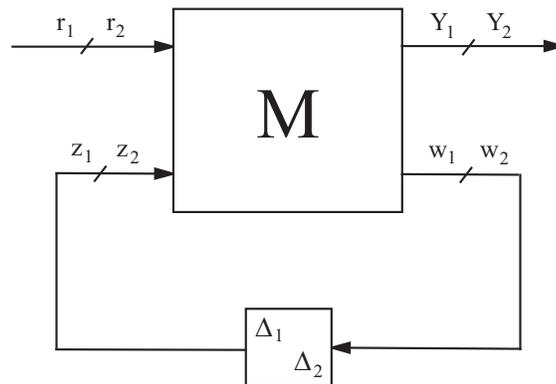
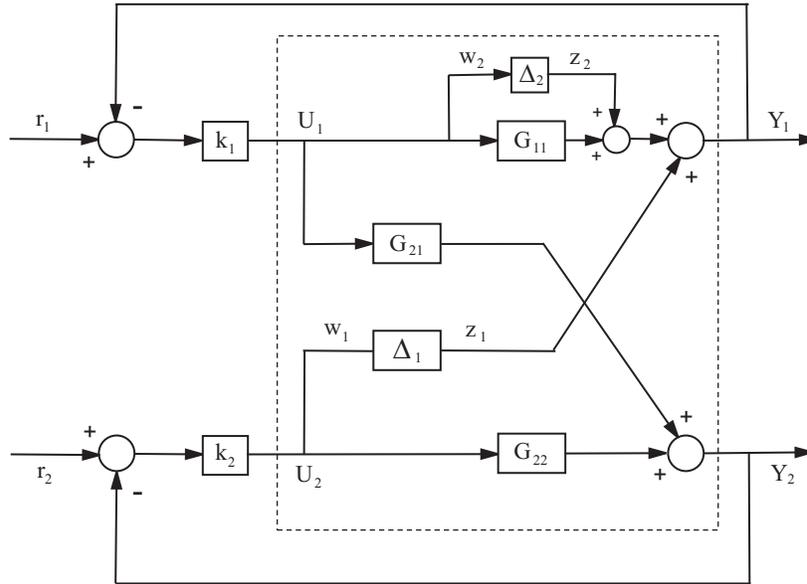


Figura 2.12: Schema $\mathbf{M} - \Delta$ nel caso di due incertezze Δ_1 e Δ_2 .


 Figura 2.13: Schema per il calcolo di \mathbf{M} nel caso di due incertezze Δ_1 e Δ_2 .

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{cc|cc} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ \hline M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} \frac{Y_1}{r_1} & \frac{Y_1}{r_2} & \frac{Y_1}{z_1} & \frac{Y_1}{z_2} \\ \frac{Y_2}{r_1} & \frac{Y_2}{r_2} & \frac{Y_2}{z_1} & \frac{Y_2}{z_2} \\ \frac{w_1}{r_1} & \frac{w_1}{r_2} & \frac{w_1}{z_1} & \frac{w_1}{z_2} \\ \frac{w_2}{r_1} & \frac{w_2}{r_2} & \frac{w_2}{z_1} & \frac{w_2}{z_2} \end{array} \right]. \quad (2.6)$$

Per lo studio della stabilità robusta ci occorre la matrice (Teorema dello *Small Mu*),

$$\left[\begin{array}{cc} M_{33} & M_{34} \\ M_{43} & M_{44} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{k_1 k_2 G_{21}}{(1 + k_1 G_{11})(1 + k_2 G_{22})} & \frac{k_1 k_2 G_{21}}{(1 + k_1 G_{11})(1 + k_2 G_{22})} \\ -\frac{k_1}{1 + k_1 G_{11}} & -\frac{k_1}{1 + k_1 G_{11}} \end{array} \right].$$

Poichè calcoleremo un upper bound del valore singolare strutturato μ , il margine di stabilità m_s che otterremo sarà più conservativo rispetto al caso non strutturato. Le prestazioni nominali del controllore sono le stesse del caso con un solo blocco di incertezza (infatti $\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ è uguale al caso non strutturato). Per studiare le prestazioni robuste è sufficiente ripetere i calcoli fatti nel caso non strutturato sulla matrice \mathbf{M} in (2.6).

2.8 Esercizio 2

Ripetere l'Esercizio 1 supponendo che la matrice \mathbf{G} abbia la seguente forma,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & \Delta_1 \\ G_{21} + \Delta_2 & G_{22} \end{bmatrix}.$$

Per i calcoli utilizzare la funzione `mu` (`mussv`) del Robust Control Toolbox di Matlab al posto della funzione `ssv`.