Laboratorio di Matlab

Rudy Manganelli

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione,

Università di Siena

manganelli@dii.unisi.it

http://www.dii.unisi.it/∼control/MatLab/LabMatlab.html

Febbraio-Marzo 2009

Symbolic toolbox

Il *Symbolic Math Toolbox* è il toolbox che fornisce gli strumenti per gestire il calcolo simbolico (manipolazione di variabili e risoluzione di espressioni ed equazioni in cui sono trattate variabili di tipo simbolico) in ambiente Matlab

- **Calcolo**:
  - derivate
  - integrali
  - limiti
  - serie di Taylor
- **Algebra Lineare**:
  - matrice inversa
  - determinante
  - autovalori
  - matrice diagonale

  - rango di una matrice
  - null-space
  - polinomio caratteristico
- **Semplificazioni di espressioni algebriche**
- **Soluzione di equazioni**
- **Trasformazioni integrali:**
  - trasformata di Laplace
  - trasformata di Fourier
  - trasformata Z
- **Grafica**

Per saperne di più ...

```
help symbolic
```

Funzioni di base

- Dichiarazione di variabili simboliche:

  `>> syms x y z`

  crea nel workspace le variabili simboliche `x y z`

  Metodo alternativo per creare una variabile simbolica `'x'` :

  `>> x = sym('x');`

- Passaggio da *double* a variabile simbolica:

  `>> sym(variable_name);`

  trasforma un *double* in una variabile simbolica (istanza di un oggetto simbolico)

  Attenzione: c'è differenza tra l'inserimento della variabile tra apici o no nell'utilizzo del comando `sym`!!!

  ```
  >> A = zeros(4);
  >> B = sym(A)
  ```

```
B=
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
```

- Passaggio da variabile simbolica a variabile numerica

  se l'oggetto simbolico è composto solo da numeri si usa il comando `double` :

```
>> C = double(B)
C =
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
```

- Definizione di funzioni:

```
>> syms x y
>> f = 1/exp(sin(x^2+y^2))
```

`f` è ora un oggetto simbolico che rappresenta $f(x,y) = \frac{1}{e^{sin(x^2+y^2)}}$

Calcolo

Derivate

Si utilizza il comando:

```
diff(function,der_variable,der_order)
```

Esempio 1:

```
>> syms x a
>> s = sin(a*x);
>> dsdx = diff(s,x,1)
ans =
cos(a*x)*a
>> dsdx = diff(s)
ans =
cos(a*x)*a
```

Esempio 2:

```
>>f = 1/exp(sin(x^2+y^2))
>> diff(f,x,4)
ans =
16/exp(sin(x^2+y^2))*cos(x^2+y^2)^4*x^4+96/
exp(sin(x^2+y^2))*cos(x^2+y^2)^2*x^4*sin(x^2+y^2)
-48/exp(sin(x^2+y^2))*cos(x^2+y^2)^3*x^2+48/
exp(sin(x^2+y^2))*sin(x^2+y^2)^2*x^4-
144/exp(sin(x^2+y^2))*cos(x^2+y^2)*x^2*sin(x^2+y^2)
-64/exp(sin(x^2+y^2))*cos(x^2+y^2)^2*x^4+12/
exp(sin(x^2+y^2))*cos(x^2+y^2)^2-16/
exp(sin(x^2+y^2))*sin(x^2+y^2)*x^4+48/
exp(sin(x^2+y^2))*cos(x^2+y^2)*x^2+12/
exp(sin(x^2+y^2))*sin(x^2+y^2)
```

Integrali

- Calcolo di $I(x) = \int f(x)\,dx$: (*integrale indefinito*)

  `fint = int(func,var_int);`

  cerca di trovare la funzione `fint` t.c. `diff(fint,x) = func`

- Calcolo di $c = \int_a^b f(x)\,dx$: (*integrale definito*)

  `c = int(func,var_int,a,b);`

Esempio 1:

```
>> syms x a
>> s = sin(a*x);
>> int(s,x)
ans =
-1/a*cos(a*x)
```

Esempio 2:

```
>> syms x a
>> s = sin(a*x);
>> int(s,x,0,2*pi/a)
ans =
0
```


Limiti

Per calcolare $\lim_{x \to x_0^{+/-}} f(x)$ si utilizza:

```
k = limit(func,var,val,dir);
```

calcola il limite della funzione `func` per la variabile `var` che tende al valore `val` da destra se `dir = 'right'`, da sinistra se `dir = 'left'`

Esempio:

```
>> syms x
>> limit(diff(abs(x)),x,0,'left')
ans =
-1
>> limit(diff(abs(x)),x,0,'right')
ans =
1
```


Algebra lineare

Matrice inversa

Data una matrice simbolica A quadrata, voglio determinare $B = A^{-1}$:

```
B = inv(A_symb);
```

Esempio:

```
>> syms a b c d
>> A = [a b; c d]
A =
[ a, b]
[ c, d]
>> B = inv(A)
B =
[  d/(a*d-b*c), -b/(a*d-b*c)]
[ -c/(a*d-b*c),  a/(a*d-b*c)]
```


Determinante

Data una matrice simbolica A quadrata voglio calcolare il suo determinante:

```
d = det(A);
```

Esempio:

```
>> syms a b c d e f g h i
>> A = [a b c; d e f; g h i]
A =
[ a, b, c]
[ d, e, f]
[ g, h, i]
>> det(A)
ans =
i*a*e-a*f*h-i*d*b+d*c*h+g*b*f-g*c*e
```


Autovalori

Data una matrice simbolica A quadrata voglio calcolare i suoi autovalori:

```
eig(A);
```

Esempio:

```
>> syms a b c d
>> A = [a b; c d];
>> eig(A)
ans =
[1/2*a+1/2*d+1/2*(a^2-2*a*d+d^2+4*b*c)^(1/2)]
[1/2*a+1/2*d-1/2*(a^2-2*a*d+d^2+4*b*c)^(1/2)]
```

Matrice diagonale

Dato un vettore simbolico V di `n` elementi, voglio creare la matrice diagonale costituita dagli elementi di V:

```
diag(V);
```

Esempio:

```
>> syms a b c d
>> V = [a b c d]
V = [ a, b, c, d]
>> diag(V)
ans =
[ a, 0, 0, 0]
[ 0, b, 0, 0]
[ 0, 0, c, 0]
[ 0, 0, 0, d]
```

Rango di una matrice

Data una matrice simbolica A, voglio calcolare il suo rango:

```
rank(A);
```

Esempio:

```
>> syms a b c d
>> A = [a b c; 2*a 2*b 2*c; a d b]
A =
[   a,   b,   c]
[ 2*a, 2*b, 2*c]
[   a,   d,   b]
>> rank(A)
ans =
2
```


Semplificazione di espressioni algebriche

- `f = simple(func)`: ricerca la forma più semplice di una espressione simbolica.
- `f = simplify(func)`: semplificazione standard.
- `f = subs(func,{var1 var2 ...},{val1 val2 ...})` sostituisce alle variabili `var1,var2,...` dell'espressione `func` i valori corrispondenti `val1,val2,...`

Esempio:

```
>> syms a b c d
>> A = [a b 0; c d 0; 0 0 3]
A =
[ a, b, 0]
[ c, d, 0]
[ 0, 0, 3]
```


```
>> v = subs(eig(A),{b c},{0 0})
v =
[                                          3]
[1/2*a+1/2*d+1/2*(a^2-2*a*d+d^2)^(1/2)]
[1/2*a+1/2*d-1/2*(a^2-2*a*d+d^2)^(1/2)]
>> simple(v)
ans =
[3]
[a]
[d]
```

Soluzione di equazioni

`z = solve(func,var)`

Determina le radici dell'equazione `func = 0` rispetto alla variabile `var`.

Esempio 1:

```
>> syms x a b c
>> f = a*x^2+b*x+c
f =
a*x^2+b*x+c
>> solve(f,x)
ans =
[ 1/2/a*(-b+(b^2-4*c*a)^(1/2))]
[ 1/2/a*(-b-(b^2-4*c*a)^(1/2))]
```

Esempio 2:

```
>> syms x a
>> f2 = log(x)-1/5*x^2-a
f2 =
log(x)-1/5*x^2-a
>> solve(f2,x)
ans =
1/2*(-2*lambertw(-2/5*exp(2*a)))^(1/2)*5^(1/2)
```

Grafica

ezplot

`ezplot`: disegna funzioni di una variabile $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

`ezplot(fun,[min_val max_val])`:

disegna la funzione `fun` nel dominio `[min_val max_val]`

Esempio:

```
>> syms x
>> f = 5*sin(x)^2+x^2;
>> ezplot(f,[-pi pi])
```


ezplot3

`ezplot3(var_x,var_y,var_z,[t_min t_max]):`

traccia traiettorie $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

Esempio 1:

```
>> syms t
>> ezplot3(sin(t),t,cos(t),[-5*pi 5*pi])
```

Esempio 2:

```
>> syms t
>> ezplot3(t,sin(t),cos(t)^2,[-3*pi 3*pi])
```

ezmesh, ezsurf

`ezmesh(fun,[x_min x_max y_min y_max])` : traccia griglie superficiali per funzioni $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sul dominio `[x_min x_max y_min y_max]`

`ezsurf(fun,[x_min x_max y_min y_max])` : traccia superfici per funzioni $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sul dominio `[x_min x_max y_min y_max]`

Esempio:

```
>> syms x y
>> ezmesh(sin(x+y))
>> ezsurf(sin(x+y),[-2*pi 2*pi -2*pi 2*pi])
```


Esercizio 9

1. definire la funzione $f(x, y, z) = e^{\sin(x+y)} + z^2$ come oggetto simbolico
2. Calcolare il gradiente $\nabla f(x, y, z)$ ed la matrice Hessiana $H(f(x, y, z))$
3. plottare $f(x, y) = f(x, y, z)|_{z=3}$
4. plottare $f(y, z) = f(x, y, z)|_{x=2y}$
5. plottare $f(x, y) = f(x, y, z)\big|_{x=y^2;\, z=\sqrt{x}}$

Simulink

Simulink è un pacchetto software di Matlab che permette di simulare ed analizzare sistemi in cui ingressi e uscite variano nel tempo.

Simulink si basa su una procedura in due passi:

- Creazione di un modello grafico del sistema tramite utilizzo dell'*editor di modelli Simulink*. In questa fase l'utente specifica le relazioni matematiche che intercorrono tra gli ingressi e le uscite del sistema.

- Simulazione delle proprietà del sistema in un intervallo temporale fissato dall'utente.

Operazioni di base

- Creazione di un nuovo modello
- Aggiunta dei blocchi necessari (*drag & drop*)
- Collegamento dei blocchi (*drag & drop*)
- Settaggio del tempo di simulazione
- Salvataggio del modello
- Lancio della simulazione

Blocchi standard

- Sources
- Sinks
- Continuous
- Discrete
- Math Operations
- Signal Routing
- User-Defined Functions
- Subsystems

Sources

- *Constant* : genera un segnale costante con valore regolabile.
- *Ramp* : genera il segnale rampa con pendenza regolabile.
- *Random Number* : genera un segnale random con distribuzione guassiana, con media e varianza regolabili.
- *Sine* : genera il segnale $A\,sin(\omega\,t + \phi) + c$.
- *Step* : genera il segnale gradino con valore iniziale, finale ed istante di attivazione regolabili.
- *Clock* : genera in uscita il tempo di simulazione.
- *From Workspace* : genera in uscita un segnale a partire da una variabile definita nel workspace: `var_in = [sig_time signal]`, dove `sig_time` e `signal` sono due vettori colonna.

Esempio:

```
>> t = 1:0.01:10;
>> var_in = [t' sin(t)'];
```

Sinks

- *Scope* : visualizza l'andamento temporale del segnale in ingresso.
- *To File* : dato un segnale in ingresso genera un file '.mat' costituito da due vettori: il vettore dei tempi di simulazione ed il segnale.
- *To Workspace* : dato un segnale in ingresso genera in uscita una variabile di tipo struttura od array contenente il segnale ed eventualmente il tempo di simulazione.
- *XY Graph* : genera la traiettoria di un punto in $\mathbb{R}^2$.

Continuous

- *Derivative* : calcola la derivata del segnale di ingresso.
- *Integrator* : calcola l'integrale del segnale di ingresso.
- *Transfer Fcn* : simula il sistema specificato tramite la funzione di trasferimento $N(s)/D(s)$.
- *Zero-Pole* : simula il sistema specificato tramite una funzione di trasferimento definita a partire da zeri e poli.
- *State-Space* : simula il sistema specificato tramite la sua rappresentazione di stato.
- *Transport Delay* : applica un ritardo specificato al segnale di ingresso.

Discrete

- *Unit delay* : ritarda il segnale tempo-discreto in ingresso di un istante di campionamento.
- *Discrete Integrator* : genera l'integrale tempo-discreto del segnale di ingresso.
- *Discrete Fcn* : simula il sistema tempo-discreto specificato tramite una funzione di trasferimento $\frac{N(z)}{D(z)}$.
- *Discrete Z-P* : simula il sistema tempo-discreto specificato tramite una funzione di trasferimento definita a partire da zeri e poli.
- *Discrete S-S* : simula il sistema tempo-discreto specificato tramite la sua rappresentazione di stato.

Math Operation

- *Abs* : genera in uscita il valore assoluto del segnale in ingresso.
- *Gain* : genera in uscita il segnale di ingresso moltiplicato per un parametro (guadagno) k regolabile.
- *Sum* : genera come segnale di uscita la somma dei segnali ingressi, con numero di ingressi e segni regolabile.
- *Trigonometric* : genera come segnale di uscita la funzione trigonometrica del segnale di ingresso specificata.
- *Math Function* : genera in uscita una delle funzioni elementari predefinite in Matlab, calcolata sul segnale di ingresso.
- *Matrix Concaten.* : genera in uscita la concatenazione di più segnali in ingresso.
- *Matrix Gain* : genera in uscita il segnale in ingresso moltiplicato per una data matrice.

Signal Routing

- *Mux* : genera in uscita un segnale multiplo (bus), costituito dall'unione di più segnali di ingresso.
- *Demux* : genera più segnali in uscita a partire da un segnale multiplo (bus) in ingresso.

User-Defined Functions

- *Fcn* : genera in uscita una qualsiasi funzione del segnale di ingresso (u) definita dall'utente.
- *Matlab Fcn* : genera in uscita una qualsiasi funzione Matlab predefinita del segnale di ingresso (u).

Discontinuities

- *Saturation* : limita il segnale di ingresso in un intervallo fissato dall'utente.

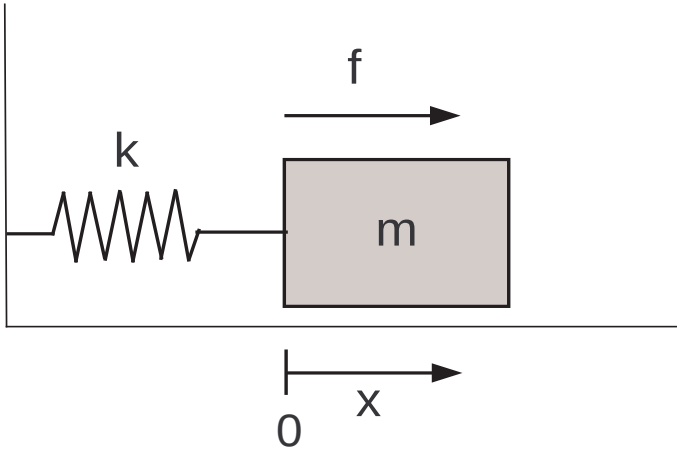
Subsystems

- *Subsystem* : permette all'utente di costruire sotto blocchi simulink
  (utile con schemi simulink complessi).

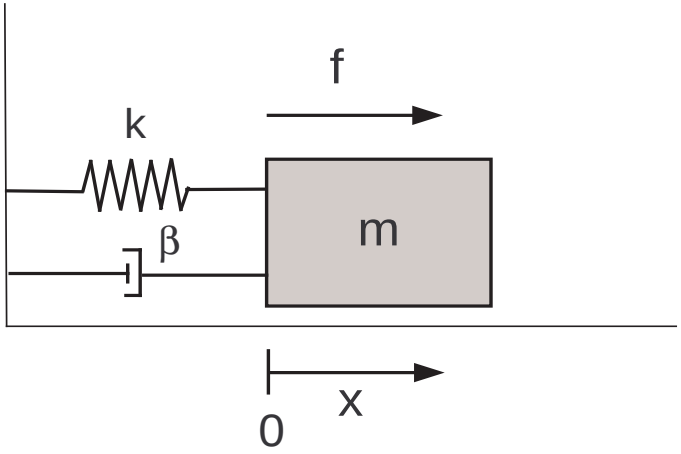
Esercizio 10 - Simulink

1. Creare uno schema a blocchi che:
   - genera una rampa di pendenza 5, con display
   - alla rampa sommare uno scalare k variabile nel workspace e farne il display congiuntamente con il precedente
2. Generare uno schema a blocchi che:
   - genera il segnale $y(t) = \sin(2t)$ su un orizzonte $t \in [0, 4\pi]$
   - genera il segnale $z_1(t) = \frac{d}{dt} y(t)$
   - genera il segnale $z_2(t) = y(t + \frac{\pi}{2})$
   - genera il segnale $z_3(t) = \int y(t) dt$

Esercizio 11 - Simulink



- Si consideri il *sistema massa-molla* riportato in figura. Supponendo che sia applicato in ingresso al sistema un gradino unitario, si simuli il sistema dinamico visualizzando l'andamento temporale della posizione x della massa.
  Si supponga che la massa $m = 1.5$ Kg, la costante elastica della molla $k = 10^3$ N/m e $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. (Suggerimento: $m\ddot{x} + kx = f$).



- Si consideri il *sistema massa-molla-smorzatore* riportato in figura. Supponendo che la costante di smorzamento della molla $\beta = 0.8$ Nms, si simuli il sistema dinamico visualizzando l'andamento temporale della posizione x della massa. Fissare gli altri parametri come nel punto precedente.
  (Suggerimento: $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = f$).